

X 円と接線

円外の点 P から円に接線を引くと下図のように必ず 2 本引けます。

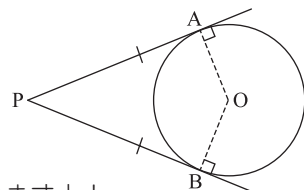
ポイント

(i) $PA \perp OA$ 、 $PB \perp OB$

(ii) $PA = PB$

この 2 点が大切で、(i) を使って (ii) の

“接線の長さは等しい” はよく証明させられますよ！



では、(ii) の証明をしておきますね！

2 点 OP に補助線を引く

(証)

$\triangle OAP$ と $\triangle OBP$ において

$OA = OB$ (半径) $\dots\dots\dots$ ①

OP は共通 $\dots\dots\dots$ ②

$\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ $\dots\dots$ ③

①②③より

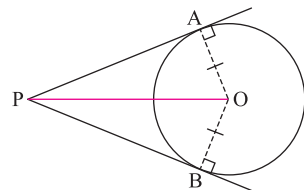
直角三角形であるから、斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいので

$\triangle OAP \equiv \triangle OBP$

よって、

$PA = PB$

おわり



接線の話をする、どうしてもあと二つお話をしなければいけなくなるんです。まいっちゃいますよね～！ まったくモ～・・・ 嫌いだー！

それは、円に外接する“四角形”と“三角形”についてです。

三角形の方は内接・外接の両方を一緒に説明したいので、まず、四角形の方から始めましょうか！

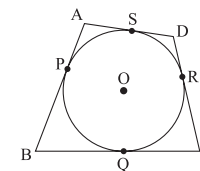
① 円に外接する四角形

ポイント

円 O に外接する四角形を ABCD とすると

$AB + CD = AD + BC$

となります。



これも証明しておきましょうか！

(証)

四角形の 4 辺は、円 O 外の頂点 A、B、C、D からの接線に対応する。

また、4 点 P、Q、R、S は、それぞれ接点を表す。

円外の 1 点から引ける 2 本の接線の長さは等しいので、

$AP = AS = a$, $BP = BQ = b$, $CQ = CR = c$, $DR = DS = d$ とおくと、

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= AB + CD \\ &= (AP + BP) + (CR + DR) \\ &= (a + b) + (c + d) \\ &= a + b + c + d \dots\dots\dots \text{①} \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= AD + BC \\ &= (AS + DS) + (BQ + CQ) \\ &= (a + d) + (b + c) \\ &= a + b + c + d \dots\dots\dots \text{②} \end{aligned}$$

よって、①②より

$$\text{(左辺)} = \text{(右辺)}$$

したがって、

$$AB + CD = AD + BC$$

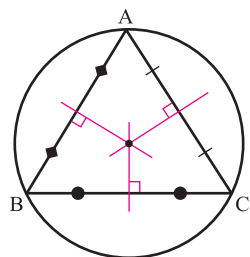
おわり

これで残るは三角形に関してですよ！ 「疲れたね！ でも、がんばろお～！」

② 外接円

三角形 ABC の3頂点を通る円を**外接円**と言います。

この円の中心を**外心**と言い、各辺の**垂直二等分線の交点**がこの円の中心、いわゆる**外心**となります。



ポイント

外接円の場合は、三角形の**3辺**を辺とは見ずに、円の**弦**と考える！

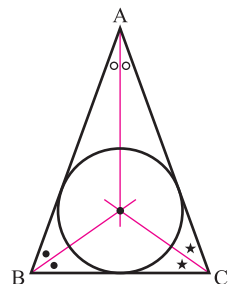
ここではとにかく作図ができるようにしてくださいね！

こんがらがってきたぞ！

③ 内接円

三角形 ABC の内側で3辺と接している円を**内接円**と言います。

この円の中心を**内心**と言い、各頂点の**角の二等分線の交点**がこの円の中心、いわゆる**内心**となります。



ポイント

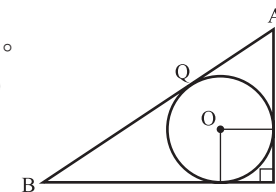
内接円の場合は、三角形の**3辺**を辺とは見ずに、円の**接線**と考える！

これが最後です。内接円の問題を**1題**やっておわりにしましょう！！

④ 内接円を含む三角形の面積

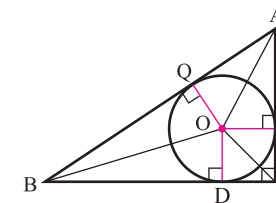
問題

$\angle C = 90^\circ$ の直角三角形 ABC がある。
 $AP = 6$ [cm]、 $PC = 3$ [cm]、 $BQ = 9$ [cm] のとき、内接円の半径はいくらになると思いますか？



< 解説・解答 >

この問題は**大変重要**でして、内接円の問題はこのような感じで必ず**半径**を求めさせるんですよ。大検などを受ける人は必ずこの流れをマスターすること！！



ポイント

- ① 円外の1点からは2本の接線が引け、その2本は**長さが等しい**。
- ② 接点と円の中心を結ぶと、必ず接線と半径は**垂直に交わる**。
- ③ 内接円の**半径**は、3辺を底辺とする3つの三角形の**高さ**になる。

では、方針を示しましょうか・・・

$\triangle ABC$ は直角三角形ですから、AC、BC の長さがわかれば面積は簡単に求まりますね。これを利用して、ポイント①から3辺の長さを求め、②③を活用し、**半径を高さ**とし、“**面積の方程式**”を立てればおわりです。

$\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$ の利用！・・・(*)

条件より $AB = AQ + BQ = 6 + 9 = 15$ ・・・① ($AQ = AP = 6$)

$BC = BD + CD = 9 + 3 = 12$ ・・・② ($BD = BQ$, $CD = PC$)

$$CA = CP + AP = 3 + 6 = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$$

だから、 \textcircled{ii} \textcircled{iii} より $\triangle ABC$ の面積は

$$\triangle ABC = 12 \times 9 \div 2 = 54 \quad \cdots \cdots \textcircled{iv}$$

そして、 $(*)$ と \textcircled{i} \textcircled{ii} \textcircled{iii} \textcircled{iv} より

$$\triangle ABC = AB \times (\text{半径}) \times \frac{1}{2} + BC \times (\text{半径}) \times \frac{1}{2} + CA \times (\text{半径}) \times \frac{1}{2}$$

これで式としては間違いはないんですが、長くてイヤですね！ そこでつぎの形で公式となっているんです！

← [これから先は自分で考えるんですよ！ ヒントは共通なものに着目する！]

内接円を含む三角形の面積の公式

$$\triangle ABC = (AB + BC + CA) \times (\text{半径}) \times \frac{1}{2}$$

では、これを使って解いてしまいましょう！！ う～ん、なるほどね～！
公式と \textcircled{iv} より、半径を r とすると

$$(15 + 12 + 9) \times r \times \frac{1}{2} = 54$$

$$18r = 54$$

$$r = 3$$

よって、

求める内接円の半径は、3 [cm] $\cdots \cdots$ (こたえ)

これで円に関する重要な知識のお話はすべて終了です。

後半でお話しした「円と三角形・四角形の関係」は数学Aに移行しましたが、数学Iの「三角比」の項目で重要な知識なんです。そこで、高校の授業で数学Iと数学Aの進度に差が出ると皆さんが困ると思い、今回、削除せず記載させて頂きました。よって、その点は承知しておいてください！

中学 3 年

第 8 話

三平方の定理