



中学 3 年

第 7 話

# 円の性質



## IX 円周角

さあ～て、案外多くの方が苦手なはず(?)の円がひさびさの登場です！  
円と言えば「おうぎ形の面積」や「中心角の大きさ」を求めるなど、多くの方が中1でツライ思いをしたのではないのでしょうか!? うんうん…涙

でも、今回、ここでお話しする内容は「円周上における角と中心角の関係」についてです。指導要領改訂にあたり、以前は触れられていた「円と三角形、四角形の関係」などが高校数学に移行しました。が、大切な知識ゆえここでは削除せずにおきました。では、早速はじめましょう！

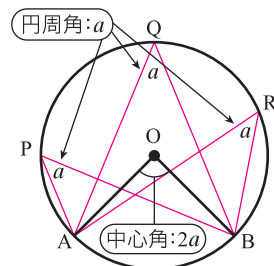
## 円周角の定理

**弧**：円周上の一部分

**円周角**：弧 AB から周上の1点へ引いてできる2本の線分の間の角

**中心角**：中心から半径を2本引いたときにできる間の角

**弦**：円周上の2点を結んだ線分  
(赤い線分はすべて弦です)



上の言葉はよく出てきますので、確認しておきました。

・ **円周角の定理** (右上の図をよ～く見て確認してください！)

1つの弧に対する円周角の大きさは一定で、かつ、その円周角はその弧に対する**中心角の半分**である。

(i)  $\angle APB = \angle AQB = \angle ARB$  (円周角の**大きさは一定**)

(ii)  $\angle APB = \angle AQB = \angle ARB = \frac{1}{2} \angle AOB$

(円周角は**中心角の半分**)

定理で特に大切な (ii) は証明しておくね！

弧 BC の円周角  $\angle BPC = \frac{1}{2} \angle BOC$  の証明

(証)

$\triangle OBP$  と  $\triangle OCP$  において

$\triangle OBP$  は  $OB = OP$  より二等辺三角形

よって、 $\angle OBP = \angle OPB \dots\dots ①$

また、外角である  $\angle AOB$  は①より

$\angle AOB = 2 \angle OPB \dots\dots ②$

同様に、 $\triangle OCP$  も  $OP = OC$  より、二等辺三角形

よって、 $\angle OCP = \angle OPC \dots\dots ③$

外角である  $\angle AOC$  は③より

$\angle AOC = 2 \angle OPC \dots\dots ④$

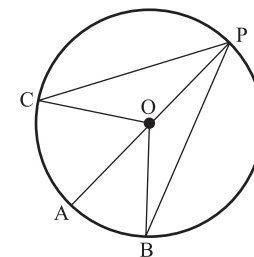
したがって、②④より

$\angle AOB + \angle AOC = 2 \angle OPB + 2 \angle OPC$

$\angle BOC = 2 (\angle OPB + \angle OPC)$

$= 2 \angle BPC$

ゆえに、 $\angle BPC = \frac{1}{2} \angle BOC$  となる。

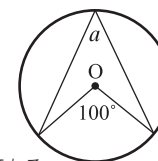


おわり

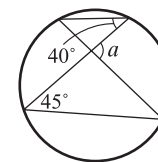
では、問題に入っちゃいましょうね……

**問題** つぎの  $\angle a$  を求めてください。

(1)



(2)



点 O は中心である。

## &lt; 解説・解答 &gt;

(1) 円周角は中心角の半分より

$$a = 100^\circ \div 2 \\ = 50^\circ$$

よって、

$$\angle a = 50^\circ \dots\dots (\text{答え})$$

・・・角ばかりで、  
チンプンカンプンです。

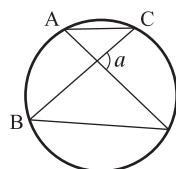
(2) 頂点 A と B は円周角が等しい。外角の性質により、 $a$  は頂点 A と C の和になる。

だから、

$$a = 45^\circ + 40^\circ \\ = 85^\circ$$

よって、

$$\angle a = 85^\circ \dots\dots (\text{答え})$$



上の図に自分で情報を書き込む！

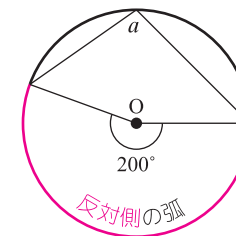
## &lt; 解説・解答 &gt;

(1)  $a$  に対する中心角は  $160^\circ$  ではなく  
反対側の  $200^\circ$  だよ！ だから

$$a = 200^\circ \div 2 \\ = 100^\circ$$

よって、

$$\angle a = 100^\circ \dots\dots (\text{答え})$$

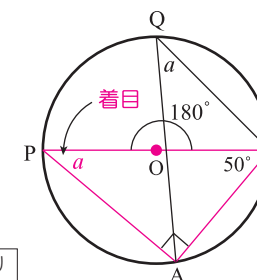
(2) 頂点 A の中心角は  $180^\circ$  だから円周角は  $90^\circ$ 。また、頂点 P、Q は円周角の関係より角度は等しい。

$$a = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ \\ = 40^\circ$$

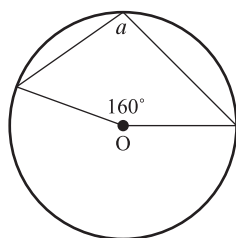
よって、

$$\angle a = 40^\circ \dots\dots (\text{答え})$$

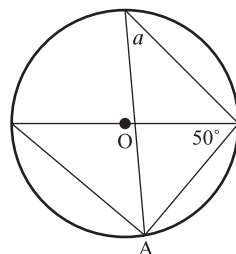
赤い三角形の内角の和より

問題 つぎの  $\angle a$  を求めてください。 点 O は中心である。

(1)



(2)



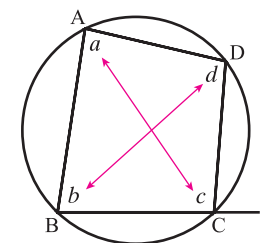
見た感じ少し難しそうでしょ！ 大切なことが含まれている問題です。

## 円に内接する四角形

## 定理

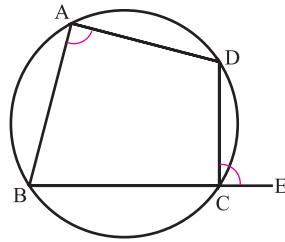
(i) 対角の和は  $180^\circ$ 

$$a + c = b + d = 180^\circ$$



(ii) 外角はとなり合う内角の**対角**に等しい。

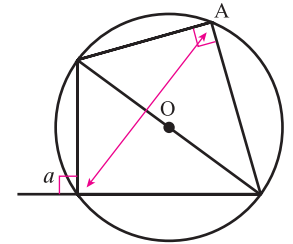
$$\angle A = \angle DCE$$



(2) (定理 ii で一発解決 !!)

頂点 A に対する中心角は  $180^\circ$   
 だから、中心角より頂点 A は  $90^\circ$   
 したがって、外角はとなり合う内角の対角に等しいことから、

$$\angle a = 90^\circ \dots\dots (\text{答え})$$



(3) 円に内接している四角形より、

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

よって、頂点 C は

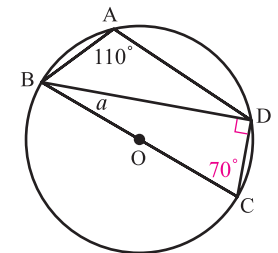
$$70^\circ [180^\circ - 110^\circ]$$

また、BC が直径より  $\angle BDC = 90^\circ$   
 したがって、

$$\begin{aligned} a &= 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ \\ &= 20^\circ \end{aligned}$$

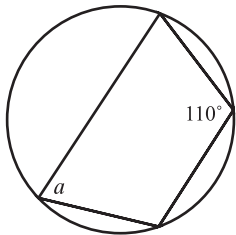
よって、

$$\angle a = 20^\circ \dots\dots (\text{答え})$$

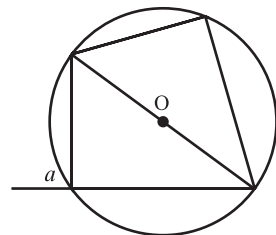


問題  $\angle a$  を求めよう！ 点 O は中心だよ。

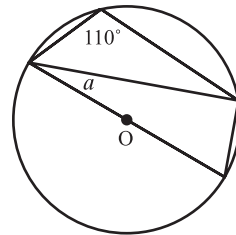
(1)



(2)



(3)



ズズズ……

やけにさびしい感じの問題ですね……  
 変な気分！ すこし寝ます。

< 解説・解答 >

(1) 円に内接している四角形の**対角の和は  $180^\circ$**  より、

$$\begin{aligned} a &= 180^\circ - 110^\circ \\ &= 70^\circ \end{aligned}$$

よって、

$$\angle a = 70^\circ \dots\dots (\text{答え})$$

四角形が円に内接する条件

(i) 対角の和は  $180^\circ$ 。

(ii) 外角はとなり合う内角の対角に等しい。

(i) または (ii) が成り立つならば、その四角形は円に内接する。

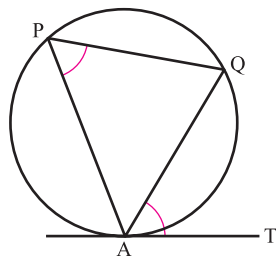
ここまでは大丈夫ですか？ あと少しですからね！ **ファイト！**

## 円に内接する三角形

## 接弦定理

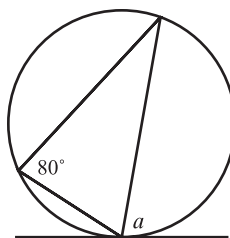
接線 AT とその接点を通る弦 AQ の作る  $\angle QAT$  は、その間にはさまれた弧 AQ に対する円周角  $\angle APQ$  に等しい。

$$\angle QAT = \angle APQ$$

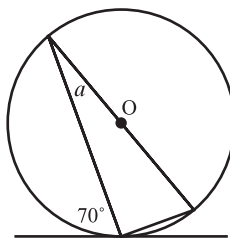


問題  $\angle a$  を求めてね！ 点Oは中心です。

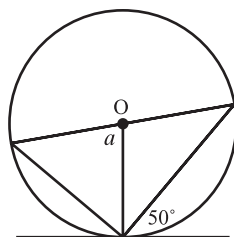
(1)



(2)



(3)



## &lt; 解説・解答 &gt;

(1) これは見てすぐにわかりますね。接弦定理より

$$\angle a = 80^\circ \dots\dots (\text{答え})$$

(2) 線分 PQ は直径ゆえ、円周角である

頂点 A は  $90^\circ$ 。

また、接弦定理より

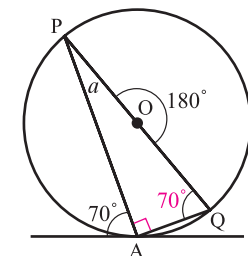
$$\angle AQP = 70^\circ$$

だから、

$$\begin{aligned} a &= 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ \\ &= 20^\circ \end{aligned}$$

よって、

$$\angle a = 20^\circ \dots\dots (\text{答え})$$



(3) 線分 PQ は直径より、円周角である

$\angle PAQ$  は  $90^\circ$ 。

また、接弦定理より

$$\angle APQ = 50^\circ \dots\dots (*)$$

これより、 $\triangle PQA$  を利用し

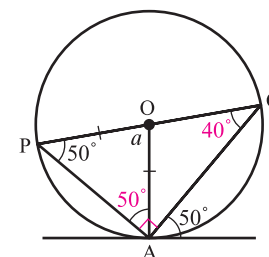
$$\begin{aligned} \angle PQA &= 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ \\ &= 40^\circ \end{aligned}$$

したがって、中心角と円周角の関係から

$$\begin{aligned} a &= 40^\circ \times 2 \\ &= 80^\circ \end{aligned}$$

よって、

$$\angle a = 80^\circ \dots\dots (\text{答え})$$



## (別解)

$\triangle OPA$  ( $OP = OA$ ) は二等辺三角形より、(\*) から  
 $\angle OPA = \angle OAP = 50^\circ$   
 よって  
 $\angle a = 180^\circ - 50^\circ \times 2$   
 $= 80^\circ$

あと残りは2項目です。“外接円”と“内接円”に関して！

さあ～！ あとひとがんばりですよ……

きっと、あとふたつ・みつつあるんでしょ！ だまされないもんね！