

## 相似な図形の計量

### ① 相似な図形の面積

ここまでで“相似”および“相似における辺の比”については理解して頂けたと期待しています・・・。

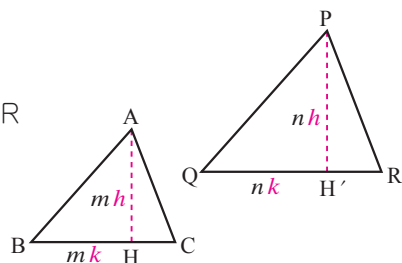
うんうん！でも、たぶんね！？笑

そこで、今度は“相似の図形どうしの面積”に関して、「相似比と面積比」についてお話ししますね！

まず、右図において△ABC∽△PQR

で、相似比を“ $m:n$ ”としましょう。

すると、△ABCと△PQRにおける  
底辺と高さをそれぞれ



「 $BC = mk$ 、 $AH = mh$ 」また、「 $QR = nk$ 、 $PH' = nh$ 」・・・(\*)

と表せますよね！？ ここまでは大丈夫・・・？ まあ～・・・汗

では、△ABCの面積を $S_1$ 、△PQRの面積を $S_2$ とし、(\*)よりそれぞれの面積を求めてみますよ！

$$S_1 = mk \times mh \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} k h m^2 \quad S_2 = nk \times nh \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} k h n^2$$

これより、面積比を求めると

$$S_1 : S_2 = \frac{1}{2} k h m^2 : \frac{1}{2} k h n^2$$

よって、「 $S_1 : S_2 = m^2 : n^2$ 」となります。

以上のことから、「相似比と面積比」に関してつぎのことが言えます！

#### 相似な図形の“相似比”と“面積比”の関係

相似な2つの図形において、

相似比が“ $m:n$ ”ならば、面積比は“ $m^2:n^2$ ”

となる。

補：念のために！

$$4:2 = 2:1$$

左辺を2で割ったのね！

ここも文字を数字の感覚で、  
共通な赤い部分で割って簡単  
な比で表しただけ！

では、つぎの問題を一緒に解いてみましょう！

**問題** △ABC∽△PQRで相似比が2:3である。△ABCの面積が8[cm<sup>2</sup>]であるとき、△PQRの面積を求めてください。

#### < 解説・解答 >

「面積比は相似比の2乗」ゆえ、△PQRの面積を $x$ とし、比例式をたてると、

$$8 : x = 2^2 : 3^2$$

$$8 : x = 4 : 9$$

$$4x = 72 \leftarrow (4x = 8 \times 9)$$

$$x = 18$$

「内項の積は外項の積に等しい」より、

$$a \text{ (外項)} : b \text{ (内項)} = c \text{ (内項)} : d \text{ (外項)}$$

$$b c = a d$$

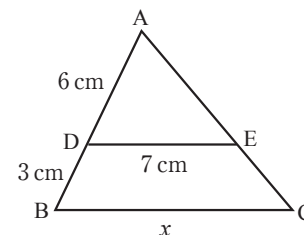
よって、△PQRの面積は18[cm<sup>2</sup>]・・・(答え)

**問題** 右図において、各問いを考えてみましょう。[DE//BC]

(1) 辺BCの長さを求めてください。

(2) △ADEの面積が14[cm<sup>2</sup>]のとき、  
△ABCの面積を求めてください。

(3) 四角形DBCEの面積  
を求めてください。



#### < 解説・解答 >

△ABC∽△ADE (相似条件：2組の角がそれぞれ等しい) より、

相似比は、 $AB : AD = 3 : 2$  (= 9 : 6より)

(1)  $x : 7 = 3 : 2$      $2x = 21$      $x = 10.5$     BCは10.5[cm]・・・(答え)

(2) 「面積比は相似比の2乗」より、△ABCの面積を $S$ とおくと

$$S : 14 = 3^2 : 2^2 \quad S : 14 = 9 : 4 \quad 4S = 14 \times 9 \quad S = 31.5$$

△ABCの面積は31.5[cm<sup>2</sup>]・・・(答え)

(3) 「四角形DBCE = (△ABCの面積) - (△ADEの面積)」より、

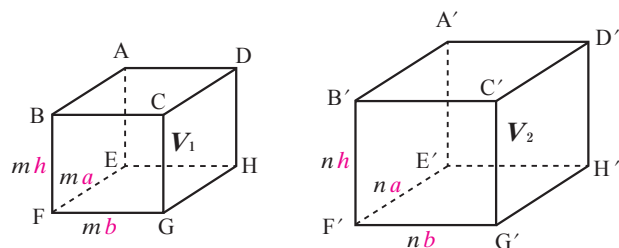
$$31.5 - 14 = 17.5 \quad \text{四角形DBCEの面積は17.5[cm}^2\text{]} \cdots \text{(答え)}$$

## ② 相似な立体の表面積と体積

さて、今度は立体における相似比と“表面積比”および“体積比”に関するお話です。

まずは“立体の相似”において、つぎのことが言えます。

- i : 対応する辺の長さの比は、すべて等しい。
- ii : 対応する面は、それぞれ相似である。
- iii : 対応する角の大きさは、それぞれ等しい。



そこで、ii より、立体の相似比が  $m:n$  のとき、

対応する面の面積比は  $m^2:n^2 \cdots (*)$

よって、(\*) より、**表面積の比**は当然、 $m^2:n^2$  なるでしょ！

また、相似比が  $m:n$  より、「 $EF = ma$ 、 $FG = mb$ 、 $BF = mh$ 」、  
「 $E'F' = na$ 、 $F'G' = nb$ 、 $B'F' = nh$ 」と表せるゆえ、

左側の体積  $V_1$ 、右側の体積  $V_2$  とすると、

$$V_1 = ma \times mb \times mh = abhm^3, \quad V_2 = na \times nb \times nh = abhn^3$$

$$\text{これより、} V_1 : V_2 = abhm^3 : abhn^3 = m^3 : n^3.$$

よって、**体積比**は、 $m^3:n^3$  になる。

## 相似な立体図形の“相似比”と“表面積比”および“体積比”の関係

相似な2つの立体図形において、相似比が“ $m:n$ ”ならば

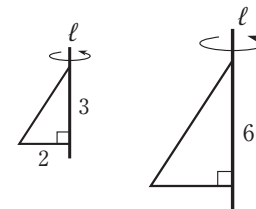
**表面積比**は“ $m^2:n^2$ ”、**体積比**は“ $m^3:n^3$ ”

**問題** 図の二つの回転体は相似の関係にあります。つぎの各問いについて考えてみましょう。

(1) 立体の名称および、底面の面積比を教えてください。

(2) 展開図における弧の長さの比を求めてください。

(3) 体積比を求め、小さい方の体積が  $4\pi$  のとき、大きい方の体積も求めてください。



< 解説・解答 > 相似な立体：対応する線分の比が相似比となる。

(1) 名称は**円すい**。この2つの円すいは相似ゆえ、高さより相似比を求めると、相似比は  $3:6 = 1:2$ 。よって、面積比は**相似比の2乗**より、  
 $1^2:2^2 = 1:4$  底面の面積比は  $1:4$  ・・・(答え)

(2) 弧の長さは底面の円周の長さと一致。

よって、長さの比は**相似比と同じ**ゆえ、弧の長さの比は  $1:2$  ・・・(答え)

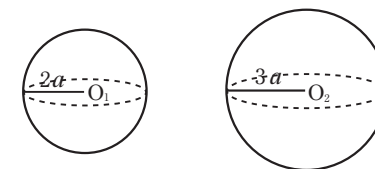
(3) 体積比は相似比の3乗ゆえ、体積比は  $1^3:2^3 = 1:8$  ・・・(答え)  
また、大きい方の体積を  $x$  とおき、比例式を立てると、

$$4\pi : x = 1 : 8 \quad x = 4\pi \times 8 \quad x = 32\pi \quad \text{体積は } 32\pi \text{ ・・・(答え)}$$

**問題** つぎの二つの球について、各問いについて考えてみましょう。

(1) 表面積を求め、  
表面積比を求めてください。

(2) 体積を求め、  
体積比を求めてください。



< 解説・解答 > 半径の比より、相似比は  $2:3$ 。**相似比との関係を意識！**

(1) 球  $O_1$ 、 $O_2$  の表面積はそれぞれ、 $S_1 = 4\pi(2a)^2 = 16\pi a^2$ 、

$$S_2 = 4\pi(3a)^2 = 36\pi a^2 \text{ より、} 16\pi a^2 : 36\pi a^2 = 4:9$$

したがって、表面積比は、 $4:9 (= 2^2:3^2)$  ・・・(答え)

(2)  $V_1 = \frac{4}{3}\pi(2a)^3 = \frac{32}{3}\pi a^3$ 、 $V_2 = \frac{4}{3}\pi(3a)^3 = 36\pi a^3$  より、 $\frac{32}{3}\pi a^3 : 36\pi a^3 = 8:27$

したがって、体積比は、 $8:27 (= 2^3:3^3)$  ・・・(答え)