

XIII 図形の移動

平行移動

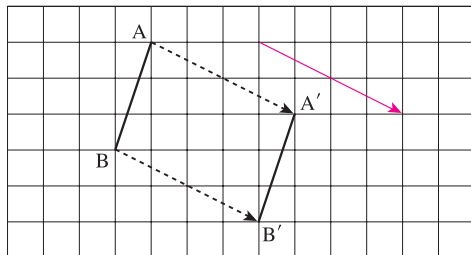
平行移動とは？

点（図形）を一定方向に、一定の距離だけ移動すること！

まずは、右下の図を見て上記の意味を確認してください！

線分 AB において、両端の点 A、B をそれぞれ赤い矢印の方向に同じ距離だけ平行移動した点を A'、B' とする。

すると、この2点を結んでできる線分 A'B' は、線分 AB を平行移動したものになります。



平行移動のポイント！

対応する点どうしを結んだ線分は、平行で長さが等しい。

では、今度は図の平行移動をしてみますね！

三角形 ABC の各点を赤い矢印の方向に同じ距離だけ平行移動した点を A'、B'、C' とする。

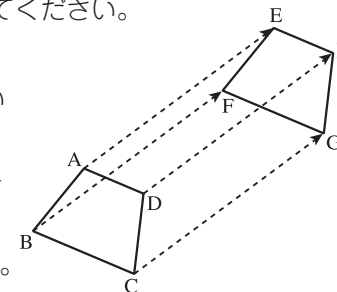
すると、この3点を結んでできる三角形 A'B'C' は、三角形 ABC を平行移動したものになります。

ちなみに、このように形も大きさも変えず位置だけ動かすことを移動と言います。移動の意味なんてわざわざ言わなくてもこれ以外にある訳ないじゃん！？

では、問題を通して理解を深めていきましょう。

問題 右図の四角形 EFGH は四角形 ABCD を平行移動したものです。このとき、つぎの各問いについて考えてください。

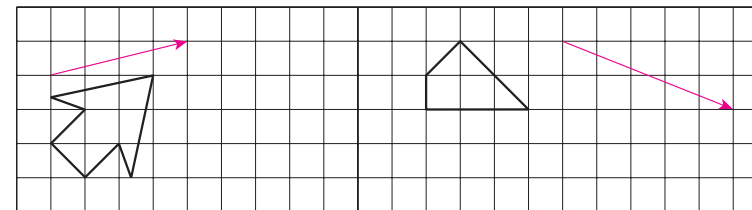
- (1) 辺 DC に対応する辺はどれですか。
- (2) 線分 DH と平行な線分を記号を使いすべて表してみましょう。
- (3) 線分 AE と長さが等しい線分を等号を使いすべて表してみましょう。
- (4) $\angle BCD$ に対応する角はどれですか。



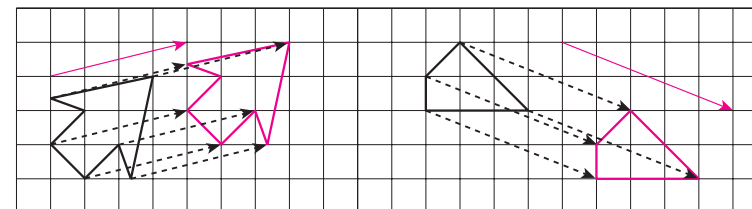
< 解説・解答 >

- (1) 対応する点どうしを合わせて答えくださいね！ 辺 HG（こたえ）
- (2) $DH \parallel AE, DH \parallel BF, DH \parallel CG \dots$ （こたえ）
矢印の向きに合わせて答えくださいね！ ダメな例： $DH \parallel EA$
- (3) $AE = BF, AE = CG, AE = DH \dots$ （こたえ）
- (4) $\angle FGH$ （各点の対応に注意してね！） \dots （こたえ）

問題 つぎの各図形を矢印の向きにその長さだけ平行移動してください。



< 解答・解説 > よくマス目を数えて、各点を移動させてくださいね！



回転移動

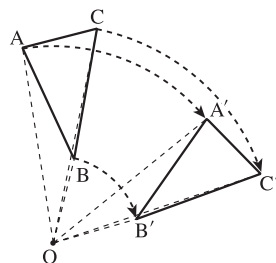
回転移動とは？

点（図形）を1つの点を中心とし、そのまわりに一定の角度だけ回転すること。また、中心点を“回転の中心”と呼びます。

そこで、右の図を見て上記の意味を理解してください。

△（三角形）ABCの各頂点A、B、Cを点Oを中心に時計回りに60°回転移動した点をA'、B'、C'とする。

すると、この3点を結んでできる図形A'B'C'は、△ABCを時計回りに60°だけ回転移動したのになります。

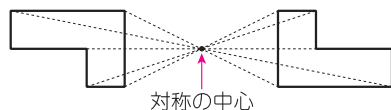


回転移動のポイント！

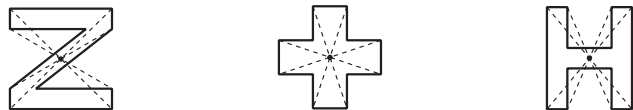
対応する点は、回転の中心からの距離が等しく、回転の中心と結んでできた角の大きさはすべて等しい。

補：180°の回転移動を“点対称移動”と呼び、下図のようになります。

この点対称に関しては、移動よりも点対称の図であるかの判断の方が要求されます。



そこで、点対称の図をいくつかお見せしますね！ 交点は対称の中心！



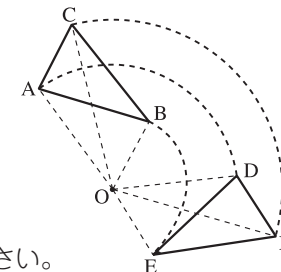
点対称のポイント！

- ・ 対称の中心から、対応する2点までの距離は等しい。
- ・ 対応する2点を結ぶ線分は、対称の中心を通る。

では、問題を通して理解を深めていきましょう！

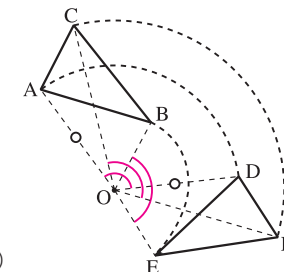
問題 右図の△DEFは△ABCを時計回りに120°回転移動したものです。つぎの各問いについて考えてください。

- (1) 線分ODと長さが等しい線分はどれですか。
- (2) 辺CAに対応する辺はどれですか。
- (3) ∠DOEと等しい角はどれですか。
- (4) ∠BOEと等しい角をあるだけ答えください。
- (5) ∠AOB = 65° のとき、∠BODの角度を求めてください。

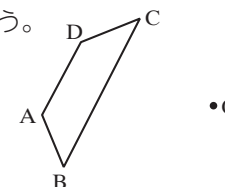


< 解説・解答 > 頂点の対応にはくれぐれも気を付けてくださいね！

- (1) 線分OA …… (こたえ)
- (2) 辺FD …… (こたえ)
- (3) ∠AOB …… (こたえ)
- (4) ∠AOD、∠COF …… (こたえ)
- (5) $\angle BOD = \angle AOD - \angle AOB$
 $= 120^\circ - 65^\circ = 55^\circ$ …… (こたえ)



問題 四角形ABCDを、点Oを回転の中心として180°回転移動させてみましょう。図をここに書き込んでみましょう。



< 解説・解説 >
この(こたえ)はp234点対称の図の参照で許してね！

問題 点対称の図であるかの判断方法を考えてみてください。

< 解説・解答 >

対応する点どうしを結んだすべての線分が1点で交われば点対称の図。

対称移動

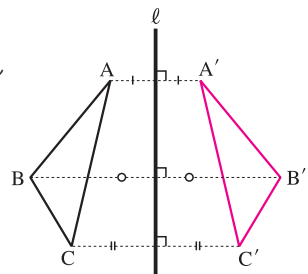
対称移動とは？

図形を直線 ℓ を折り目として、折り返してその図形を移すこと。

右図を見て上記の意味を理解してください。

$\triangle ABC$ を、直線 ℓ を折り目として折り返してできた $\triangle A'B'C'$ が、 $\triangle ABC$ を**対称移動**したことになります。

また、折り目とした直線 ℓ を“**対称の軸**”と呼びます。



対称移動のポイント！

- ・対称移動で移る図形どうしは、対称の軸に対して線対称である。
- ・対応する点を結んだ線分は、軸に対し**垂直**であり、かつ、軸の交点から各点までの**距離は等しい**。軸は、対応する点を結んだ線分における**垂直二等分線**とも言える。

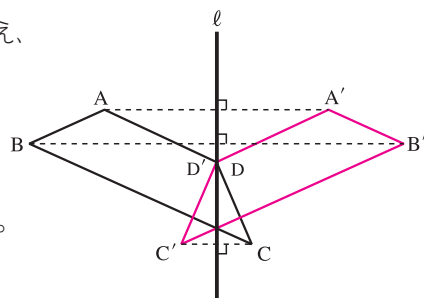
ちなみに、**対称の軸**に移動させたい図形が交わっていても問題はないんですね！

右図を見てください。

四角形 ABCD の点 D は軸上の点ゆえ、**不動点**（動かない点）になるだけ。

よって、残りの点から**軸に垂線**を引き**反対側に同じ長さ**だけ延長した所がその点の軸に対する対称点となります。

したがって、あとは移動した点どうしを結ぶだけ。

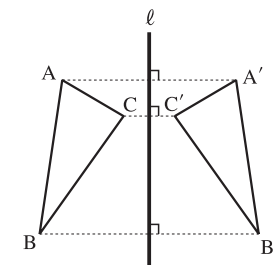


では、問題を通して理解を深めていきましょう。

問題 図は $\triangle ABC$ を対称移動し $\triangle A'B'C'$ を作ったものです。

つぎの各問いについて考えてください。

- (1) 辺 CA に対応する辺はどれですか。
- (2) 軸 ℓ は線分 AA' 、 BB' 、 CC' に対し、どのような直線と言えますか。
- (3) 直線 BC と直線 $B'C'$ が交わる位置はどこでしょう。



< 解説・解答 >

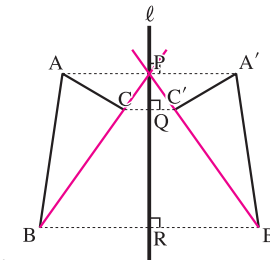
- (1) 各頂点の対応に気を付けてくださいね！ 辺 $C'A'$ （こたえ）
- (2) 右図で各線分 AA' 、 CC' 、 BB' と軸 ℓ との交点をそれぞれ P、Q、R とします。すると、つぎの関係が成り立つ。

$$\begin{cases} AA' \perp \ell, & AP = A'P \\ CC' \perp \ell, & CQ = C'Q \\ BB' \perp \ell, & BR = B'R \end{cases}$$

よって、

軸 ℓ は各線分の**垂直二等分線**である。（こたえ）

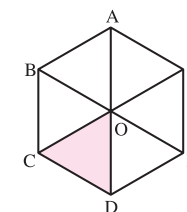
- (3) 右図のごとく、軸 ℓ 上で交わる。（こたえ）



問題 右図は正六角形で対角線を結んだものです。 $\triangle OCD$ が**平行移動**、

対称移動して重なる三角形をすべて書き出し、

また、点 O を中心に $\triangle OCD$ を反時計回りに“**回転移動**”し $\triangle OEF$ 、 $\triangle OAB$ と重なるには、それぞれ何度回転させればよいですか。



< 解説・解答 >

正六角形の対角線でできる（各辺を底辺とする）三角形は**正三角形**。よって、**平行移動**では、 $\triangle ABO$ 、 $\triangle FOE$ 。**対称移動**では、 $\triangle OED$ 、 $\triangle OAF$ 、 $\triangle OCB$ と、 $\triangle OFE$ 、 $\triangle OBA$ （対角線だけが対称軸ではないですからね！）。そして、 $\triangle OEF$ には 120° 、 $\triangle OAB$ には 240° 回転（こたえ）

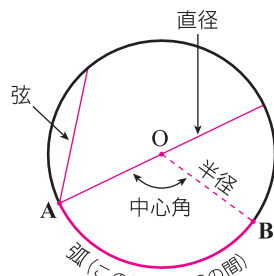
XIV 円 および 扇形

いかがですか？ この程度ならばまだまだ余裕ですか？ ここで悲しいお話をしなくてはなりません。

実は余裕はここまででして、これからはみなさんが(?) 苦手な“円”のお話することになります。それも、面積や円周のような問題ではないんですね～。でも、やらなくてはいけないのでやってしまいましょう。また、ここでの知識がつぎの“作図”に関係してきますのでとっても大切なんですよ！

① 円の部分名

円にはいろいろ名前がついています。この名称は絶対に覚えなくてははいけません。



- 直径 (ちょっけい) : 円周上の2点および中心を通る線分
 半径 (はんけい) : 中心と円周上の1点を結んだ線分
 弦 (げん) : 円周上の2点を結んだ線分
 弧 (こ) : 円周上の一部分 (右上図ではABの間の円周上の長さ)
 中心角 (ちゅうしんかく) : 中心から半径を2本引いたときにできる間の角

さて、ここまでで言葉の説明は終了し、今度は「円と弦」、および「円と接線」の性質について説明しますよ。

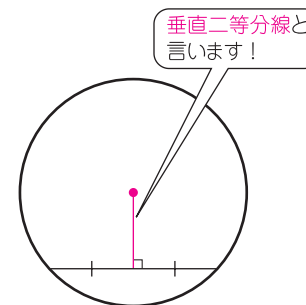
「たいへんですよ～！」

② 円と弦の関係

・弦について

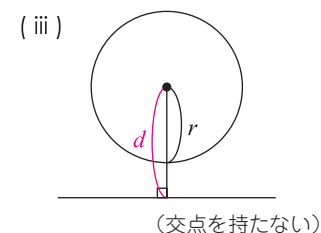
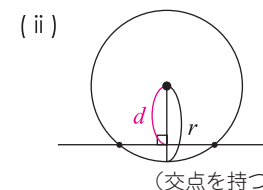
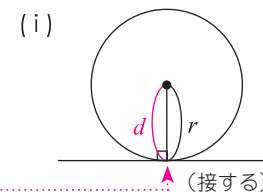
中心から弦に垂線を引くと、弦の真中(中点)で交わります。

この円と弦との関係はと～っても大切なことなんですね！ 作図の知識が案外大学入試のときなんかでも役に立つんです!! 本当だよ！



③ 円と接線の関係

“接線”ってわかります？ 直線と円周が同じ1点を通ることを言うんですよ。イメージできますか？ (i) の図を見てください。直線と円周が接していますよね。この接している部分を接点と言います。ほら！ 接点と点の関係しているでしょ。ここでは (i) の接する関係を基準に (ii) の交わる、(iii) の離れる関係を“中心からの距離”と“半径”との関係で確認することが目的なんです。



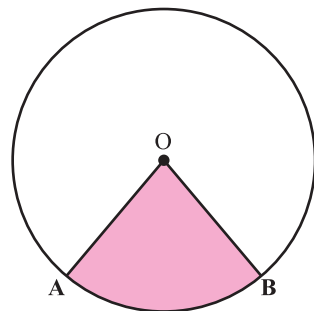
[距離と半径の関係 重要!!]

- (i) $d = r$
 (ii) $d < r$
 (iii) $d > r$

d : 中心から直線までのキョリ
 r : 半径

④ 円と扇形の関係

さて、今度は^{おうぎがた}扇形^{せんす}です。扇子を見たことありますか？ 夏の暑いときに開いて、パタパタあおぐアレです。その形を思い出してくださいね。右図の OAB が扇形になります。



ここではこの扇形の^{面積}・^{弧の長さ}・^{中心角}を求める方法を説明したいと思います。ここは苦手な人が多いんでしょうね！
イヤだけどやりますかあ・・・



本当につらいですよ～！！

せっかくですから、上の扇形を使って話を続けますね。

問題 半径 3 [cm] で中心角 60° の扇形 OAB において

- (1) 扇形 OAB の面積
- (2) 弧 AB の長さを求めてみましょう。

< 解説・解答 >

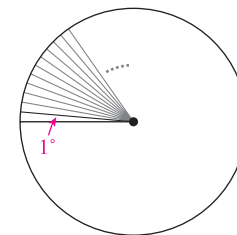
「円の中心角を知っていますか？」中心 O の周りの角度のことで、グルッと回ると 360° になります。これがポイントです！

中心 O から半径をたくさん引いて、円を 360 等分してしまえばすべて解決です！ 簡単！ かんたん！ カンタン！ 「ほんとかなあ～??」

つぎのページのように、中心から線を引き^{中心角 1° の扇形}を 360 個集めれば^{円の面積}になり、またその弧を 360 個集めれば^{円周}になりますよね。

この考え方を利用し、扇形がいったい何個の“ 1° の扇形”でできているかを考えればよいんです。 「おわかりかな・・・？」

そうだな～・・・、先に“^{公式}”を教えてしましましょうか！



$$\text{扇形の面積} = (\text{円の面積}) \times \frac{\text{中心角}}{360} \quad \dots\dots (i)$$

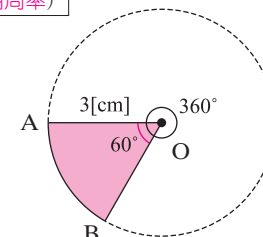
$$\text{扇形の弧の長さ} = (\text{円周の長さ}) \times \frac{\text{中心角}}{360} \quad \dots\dots (ii)$$

上の話は理解できたと思いますので、この公式の意味も大丈夫ですよね?! では、この公式を使ってさっさとすませてしまいましょう!!

$$(1) \quad \text{円の面積} = (\text{半径}) \times (\text{半径}) \times \pi \quad (\text{円周率})$$

$$\begin{aligned} \text{面積} &= 3 \times 3 \times \pi \times \frac{60}{360} \\ &= 3^2 \pi \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{2} \pi \end{aligned}$$

$$\frac{3}{2} \pi \text{ [cm}^2\text{]} \quad \dots\dots (\text{こたえ})$$



π : パイと読む
 $\pi = 3.14\dots\dots$

$$(2) \quad \text{円周} = (\text{直径}) \times \pi \quad \text{直径} = (\text{半径}) \times 2$$

$$\begin{aligned} \text{弧の長さ} &= 3 \times 2 \times \pi \times \frac{60}{360} \\ &= 2\pi \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

図形も計算があるんだ・・・
キレイだー

$$= \pi$$

$$\pi \text{ [cm]} \dots\dots\dots (\text{こたえ})$$

最後に、扇形の中心角を求める問題を片づけてしまいますか？

問題

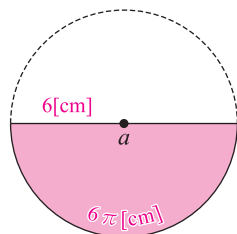
- (1) 半径 6 [cm]、弧の長さ 6π [cm] の扇形の中心角は？
 (2) 直径 4 [cm]、面積が π [cm²] の扇形の中心角は？

< 解説・解答 >

ポイントは中心角を a とおき、**公式に代入**すれば OK !!

(1) **公式 (ii)** より

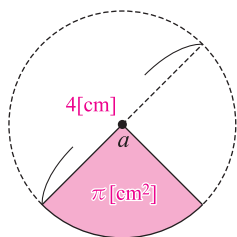
$$\begin{aligned} 2 \times \cancel{6}^1 \times \cancel{\pi}^1 \times \frac{a}{360} &= \cancel{6}^1 \cancel{\pi}^1 \\ \uparrow & \\ \text{円周} & \\ \frac{a}{180} &= 1 \\ a &= 180 \end{aligned}$$



$$\text{中心角 } 180^\circ \dots\dots\dots (\text{こたえ})$$

(2) **公式 (i)** より [半径: $4 \div 2 = 2$]

$$\begin{aligned} 2 \times 2 \times \cancel{\pi}^1 \times \frac{a}{360} &= \cancel{\pi}^1 \\ \uparrow & \\ \text{円の面積} & \\ \frac{a}{90} &= 1 \\ a &= 90 \end{aligned}$$



$$\text{中心角 } 90^\circ \dots\dots\dots (\text{こたえ})$$

ごめんね！ 実はまだ面積の問題があと 1 問ありました。

「おこっているよね～？」

問題

半径が 6 [cm]、弧の長さが 4π [cm] のとき、扇形の面積を求めてみよう!!

< 解説・解答 >

中心角がわからないので、少し面倒そうですね！

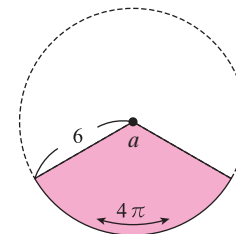
でも実はもう **1 つ公式**があるんだよ～！

とにかく今までの考え方で解いてみましょう。

方針としては、とにかく中心角を a とおいて、

求めなくてははいけませんね。

まず公式に代入！



$$(\text{弧の長さ}) \quad 4\pi = 2 \times 6 \times \pi \times \frac{a}{360} \dots\dots\dots ①$$

$$(\text{面積}) = 6 \times 6 \times \pi \times \frac{a}{360} \dots\dots\dots ②$$

あれ？ ①、②の式を比較してみてください。「気がつきませんか？」

私は気づきましたよ！ 面積が求められればよいのであって、別に中心角が知りたいわけではないんですからね！ ①の式から $\frac{a}{360}$ の値がわかれば②の式に代入して解決なんじゃないのかな？！ 決まった！

方針を変えます。①より

$$\begin{aligned} 2 \times 6 \times \cancel{\pi}^1 \times \frac{a}{360} &= 4 \cancel{\pi}^1 \\ \frac{a}{360} &= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \dots\dots (*) \end{aligned}$$

よって、②に (*) を代入！

$$\begin{aligned} (\text{面積}) &= 6 \times \cancel{6}^2 \times \pi \times \frac{1}{\cancel{3}_1} \times \boxed{\frac{a}{360}} \\ &= 12 \pi \text{ [cm}^2\text{]} \dots\dots\dots (\text{こたえ}) \end{aligned}$$

案外簡単にできてしまいましたね！ でも、もっと簡単にすぐ答えが出る公式があるんです！！ 知りたい？ どうしようかなあ～・・・

仕方ないなあ～！ 授業だったら自分で公式を導かせるけど、今回は私がやりますから、公式の仲間に入れておいてくださいなね。「興味ある人だけ読む！」では、ここですぐ下のように入力します。読まなくてもOK！！

(扇形の弧の長さ) : l , (面積) : S , (半径) : r

$$l = 2\pi r \times \frac{a}{360} \cdots (A) \quad S = \pi r^2 \times \frac{a}{360} \cdots (B)$$

$\frac{a}{360}$ が共通。そこで (A) を変形

$$2\pi r \times \frac{a}{360} = l \quad \text{だから、} \frac{a}{360} = \frac{l}{2\pi r} \cdots (C)$$

この (C) を (B) の $\frac{a}{360}$ に代入しますよ！

$$S = \pi r^2 \times \frac{l}{2\pi r} = \cancel{\pi} \times \cancel{r} \times r \times \frac{l}{2\cancel{\pi}} = \frac{1}{2} l r$$

よって、公式は以下ようになりますね！ 公式だけは覚えること！

公式 : $S = \frac{1}{2} l r$ (弧の長さと半径だけで面積がわかる)

では、先ほどの問題をこれを使って解いてみましょう。

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\pi = 12\pi \text{ [cm}^2\text{]} \cdots \cdots \text{(こたえ)}$$

となり、簡単にできてしまいましたね！ やれやれ！ おわった!!!

ひとりごと・・・ そのわりにはやけに大きいな～！

実は私、劣等感のかたまりなんですよ！ 小・中・高と成績は最悪！ 特に中学時代は超肥満児で成績は学年350人中310番台。デブで成績が悪かったゆえ、一部の成績の良いヤツらからよくからかわれましたよ！ 高校も進学校ではなく、相変わらず成績は良くありませんでした！ しかし、それでも“夢”はあり、無理を承知で志望校を受験。当然のことながら、数学の答案には受験番号しか書けずに、2時間数学の白紙答案4枚とのニラメッコ。回収されるときのみじめさ、わかりますか？ その後自分なりに勉強しましたが成績は上がらず、勇気を出して、当時受験数学の神様と言われた“なべつぐ先生”（渡辺次男先生）のところへ“数学を教えてください”と新宿の予備校へ・・・。

当時先生は70歳を越えていたと思います。なべつぐ先生は一言も言わず、私の参考書の問題に淡々と10問ほど印をつけ、無言で返されました。私はその問題をノートにやり、チェックをしてもらうためだけに明るく朝7時までに新宿の予備校へ。そして、最初の問題が間違っていたならば、ノートに大きくバツを付け、無言でノートが返される。この生活がほとんど毎日つづき、半年を過ぎた頃、先生が勘違いをされ大きくノートにバツを。しかしすぐに気づき「すまん！ おわびにこれをあげよう！」と小さい石のホルダーを私にくれました。この時点までの半年間、先生からはまったく声をかけられていないんです。驚きましたよ！ この石のホルダーは今でも私の宝物です。そして、受験が終わり、結果は不合格。先生からは一言「どうして君が落ちるんだ・・・！」と。私は不合格のことも忘れその言葉がうれしくてね～！！

先生には約2年間ノートを見ていただきましたが、このたった5分の2年間が今の私の数学の源です。みなさんはたった5分間、ノートを見てもらうためだけに毎日朝5時半起き、これを2年間続けられますか？

私が伝えたいのは、人は必ず他人には言えない、つらい努力をしているということです。これを読んで勉強している人たちも、あきらめずに少しずつ、ゆっくりでいいからがんばってほしいんですよ。数学のできないつらさは、誰よりもわかっているつもりです。「数学を勉強していて“涙”が出てきたことがありますか？」私は何度もあります。本当ですよ。

実は、私はまだ子供の頃の“夢”がかなわずにいます。それゆえ、未だ夢をあきらめきれずに努力しています。“つらい”のはあなただけではありません！ 一緒にがんばりましょうよ！

“夢なくして人生とはなんぞや！” みんながんばろ～ぜ！！