



本書執筆の機会を賜りましたのは、私が講師をさせていただいている「大人のための数学教室 和」に書籍の企画が持ち込まれたことから始まります。

教室代表の堀口智之氏に、この企画をふっていただきました。深く感謝いたします。教室では、数学を学ぶ楽しさが伝わっていくような授業ができるよう努力して参ります。

ベレ出版の坂東一郎氏には、拙い原稿を本の形にいただきました。いくら感謝しても足りません。また、編集者として多くの学ぶべき点があり、これで稿料をいただいよいかと、ふと疑問に思うことさえありました。「語りかける数学」のようなロングセラーの良書をこれからも出し続けていかれることを祈念いたします。

また、組版を担当していただいた WAVE の清水氏、ラフな手書きの原稿の図から魅力的な図版を起こしていただいた溜池氏、校閲・校正担当の高橋氏、校正担当の小山氏、その他、関わっていただいた全てのみなさん、本当にお世話になりました。

なお、私が出版社の社員という身分でありながら、他社への寄稿を快諾していただきました株式会社東京出版代表取締役の黒木美左雄氏のご厚情には、本業を通して感謝の意を示していく所存です。

平成 23 年 5 月

石井俊全

まずはこの一冊から 意味がわかる線形代数

もくじ

はじめに ..... 3

## 第 0 章 線形代数とは

- 1 ● セ・ン・ケ・イ・ダ・イ・ス・ウ ..... 16  
— 線形代数という言葉
- 2 ● 見た目から入る線形代数 ..... 19  
— 線形代数で扱うモノ
- 3 ● ダ・ヴィンチの予言 ..... 22  
— 線形代数の意義
- 4 ● もしも線形代数がなかったら... ..... 25  
— 線形代数の応用分野

## 第 1 章 連立 1 次方程式

- 1 ● 掃き出して未知数を求めよう ..... 32  
— 連立 1 次方程式の解き方
- 2 ● 解がたくさんあったっていいじゃないか? ..... 40  
— 1 つの値に決まらない場合

## 第 2 章 線形空間

- 1 ● ふつうの数だって、立派なベクトルだ! ..... 54  
— 線形空間の一番簡単な例
- 2 ● 2 数の組をベクトルと見よう ..... 63  
— 座標平面への拡張
- 3 ● 平面上に新しい番地を割り当てよう ..... 72  
— ベクトルの 1 次結合 ( $R^2$  編)

- 4 ● 平面ベクトルが分かれば空間ベクトルだって… ……82  
— 3次元列ベクトル
- 5 ● ベクトルの集合をカッコよく言うと ……94  
— 線形空間
- 6 ● 線形空間の一部でも線形空間だ！ …… 102  
— 1次結合と部分空間

### 第3章 内積

- 1 ● ベクトルどうしを掛けると… …… 112  
— 内積
- 2 ● 内積のイメージを捉えよう …… 125  
— 内積の図形的な意味
- 3 ● それなら、正規直交基底を作り出そう …… 134  
— シュミットの正規直交化

### 第4章 線形写像と行列

- 1 ● 数の掛け算は線形写像の一番簡単な例だ …… 144  
— 比例式から始めよう
- 2 ● われわれは世界を線形性で捉えている …… 148  
— 線形性の条件式
- 3 ● 線形性を持った写像を考えよう …… 155  
— 線形写像を定義
- 4 ●  $R^2$  から  $R^2$  への写像を表すには？ …… 159  
— 行列登場
- 5 ●  $f: R^2 \rightarrow R^2$  の線形変換をイメージしよう …… 169  
— 線形変換の図像的イメージ
- コラム 誤り符号訂正理論 …… 171

- 6 ● 回転と折り返しは線形変換だ！ …… 177  
— 回転折り返しの表現行列
- 7 ● 線形写像をつなげよう …… 183  
— 写像の合成
- 8 ● 行列を足し算してみよう …… 193  
— 行列の計算法則
- 9 ● 行列に割り算があってもいいじゃないか！ …… 200  
— 逆行列
- 10 ● 3次元でも逆行列があるよ …… 209  
— 3次の逆行列
- 11 ●  $f$  の使用前、使用後はどれだけ違うの？ …… 214  
—  $\text{Ker } f$  と  $\text{Im } f$
- 12 ●  $\text{Im } f$  の大きさで、行列の偉さが決まるのだ …… 228  
— 行列のランク

### 第5章 対角化の意味

- 1 ● 旧番地と新番地の対応表を作ろう …… 236  
— 基底の取替え
- 2 ● 旧番地の移動情報を新番地に言い換えるには …… 245  
— 基底の取替えと線形変換
- 3 ● 線形変換  $f$  の特徴的な指標を求めよう …… 251  
— 固有値、固有ベクトル
- 4 ● 線形変換  $f$  を簡素に表す表現行列を求めて… …… 263  
— 対角化
- 5 ● 線形変換  $f$  の固有値を括り出そう …… 272  
— スペクトル分解
- コラム 多変量解析 — 主成分分析 …… 281

- 6 ● 扱いやすくて気さくな対称行列 ..... 286  
—— 対称行列の性質
- 7 ● たまには対角化できないときもあるのさ ..... 301  
—— 対角化、その後の話題

## 第6章 行列式

- 1 ● これなら覚えられる！ サラスの公式 ..... 306  
—— 行列式(2 × 2、3 × 3の場合)
- 2 ● 行列式の計算法則を実感しよう！ ..... 311  
—— 行列式の性質
- 3 ● 模式図で行列式を書き足せ！ ..... 322  
—— 一般の行列式の定義
- ◻ コラム ◻ 15パズルと転倒数 ..... 334
- 4 ● 行列式をいろんな角度から眺めると..... 339  
—— 余因子展開
- 5 ● 余因子を使えば一発 逆行列(字余り...) ..... 349  
—— 余因子と逆行列
- 6 ● 行列式は平行四辺形の面積、平行六面体の体積 ... 355  
—— 行列式の図形的意味
- 7 ●  $BA$  は、やはり掛け算だよ ..... 366  
—— 行列式の乗法性
- ◆ 付録 ◆ さらに学びたい人のためのブックガイド ..... 372
- さくいん ..... 375

## 第0章

# 線形代数とは