Imaginary number and Complex number

01 虚数とはどのようなものか

2乗してマイナスになるとなぜいけない?

虚数との出会いと別れ

「虚数」というのは、

「2 乗するとマイナスになる数」

のことで、英語では“*imaginary number*（想像上の数）”といいます。

とくに、　**「2 乗すると − 1 になる数」**

のことを

i

“i”は、“*imaginary*”の頭の“i”です。

と書きます。つまり、

$i = \sqrt{-1}$　あるいは、$i \times i = i^2 = -1$

これに対して、**それまで習ってきた数を「実数」といいます。**

整数、0、負の数、分数、小数、無理数など、これらは全部実数で、英語では“*real number*（現実の数）”といいます。

実数は 2 乗しても決してマイナスにはなりません。

虚数とはじめて出会うのは、高校 1 年のとき、

2 次方程式の解を求めるときです。

たとえば、$x^2 - 5 = 0$ だと、解は $x = \pm\sqrt{5}$ です。

ところが、$x^2 + 5 = 0$ に対しては、

それまで知っていた実数の中では解は見つかりません。

この方程式の解を作ろうとすれば、

2 乗すると − 5 になる数 $\sqrt{-5}$

というのをゴウインに認めて、解を $x = \pm\sqrt{-5}$ とするしかありません。

一般に、

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$

に対して、この式を変形していくと

解の公式 $\boldsymbol{x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

を導くことができます。

この公式の $\sqrt{\ }$ の中は、a、b、c の値しだいではマイナスになることもあります。このとき、解は実数ではなくなってしまうのです。

そこで、$D = b^2 - 4ac$ とすると、

$D \geqq 0$ だと実数解、$D < 0$ だと虚数解

ということになります。（D を判別式といいます。）

虚数という新しい数を認めると、

どんな 2 次方程式でも必ず解を持つことになるのです。

◇ 虚数との出会いの可能性は・・・

さて、高校に入学したばかりの希望と不安の入り混じったその時期に、「2 乗するとマイナスになる数」という虚数と出会います。

それまで慣れ親しんでいた実数とは相容れない**ケッタイな数**と出会うわけですから、虚数は、それからの高校生活にとって（というのが大袈裟ならば、少なくともそれ以降の数学に対して）大きな影響を及ぼすはずです。なにしろ、

どんな数でも 2 乗すると（0 か）正になるというのは、ほとんど常識であると思っていたハズなのに、そうでないのです。

しかも、虚数には大きさがない！

だから、虚数を数直線の上に並べることはできないのです。

「たかが」2 次方程式の解がいつでもあるようにするためだけに、こんなわけのわからない数を認めなければいけないのだろうか？

だとすれば、虚数とは一体何者なのだろうか？

多くの人は、虚数というものの正体を知りたいと思い、いろいろと考えをめぐらせるはずです。

虚数は常識を破る！

実数しか知らない私に、
それは突然入り込んできたのです！

2 乗するとマイナスになるというのもずいぶんなものです。そんなの聞いたことがありません。
これまでそんなはずがないと信じていたことが、「ありうるかも」といわれたのです。本当にビックリ！

でもそれだけではなかった。

何しろ、大きさがないのです！
$\sqrt{2}$ だってずいぶんと変な数だけど、でもだいたいの大きさはわかります。$\sqrt{2}=1.414\cdots$だから、1.4 と 1.5 の間に並べることができます。$\sqrt{2}$ は小数で表すことができるので、だいたいの居場所はわかるのです！
ところが、虚数というのは、小数で表すこともできないので、他の数と大きさを比べることもできないし、数直線のどこにいるのかもさっぱりわからない。
突然現れたりでまさに神出鬼没。得体が知れません！

こんな虚数だからこそ
何かを変えてくれるかもしれない・・・