献　　辞

まず亡父幸治には、東京大空襲で母親と七人の兄弟姉妹を失うという悲劇を経験しながらもそれを一言も語らず黙々と職人として働き、大成し豊かな環境を与えていただいたことに感謝したい。母登紀子には、物心ともに多大なる支援を受け、この恩恵に与らなければ現在の私は存在しなかったでしょう。寛大なる心に感謝申し上げたい。

なぜか英語より日本語が得意なReed O'Connor君には、理系の見方とは違った観点からさまざまな示唆を受けました。感謝の意を表します。

そして、今回この書を著す機会を与えて下さった畑中隆氏には、編集の手間も取っていただいたことも合わせて感謝申し上げたい。

最後になりましたが、編集、図版作成など労をとって頂いたベレ出版の皆様に感謝いたします。

－ALTER IPSE AMICUS.－

一石 賢

はじめに

数学や物理に興味のある高校生の諸君！　そして、理系の大学生はもちろん、すっかり数学から離れて久しいビジネスマンの方々。

数学をやりましょう！

絶対に後悔はしません。自分のロジックを鍛えるのにこれほど適切な分野はないからです。ここで改めてロジックの重要性を述べる必要はないでしょう。数学というと、ともすれば記号をいじくり回しているイメージが強いでしょうが、それは違います。あくまでも論理の訓練です。

学校で習う数学は、先にカリキュラムが過密に決まっていて、少しずつ未消化のまま次の項目に移ってしまう……ということが多いのです。実はこれが非常に怖い。数学が論理の組み立てで成り立っている以上、一部でも未消化の部分があると、先々大きな亀裂となってしまうからです。

だから、分からない部分が出てきたらその場で解決することが最急務です。先生を困らせるくらい聞き込むことです。あるいは、参考書に当たってもいい。とにかく、放置しないことです。

数学は、人間の英知の最たるものです。強調してしすぎることはないでしょう。純粋に論理に従い、一切の非論理性を排除してきた、唯一といってよいほどの人類の至宝です。それによって思わぬ難題を抱え込むこともありますが、それは精密さを求める上で不可避といえます。数学者のたゆまぬ努力と精進は、まさに頭脳を削るほど過酷なことで、なかには数世代の時間を掛けてやっと証明することができる、という命題も多く存在します。

それどころか問題解決の取り組みはまさしく現在進行形で、問題に取り組む姿には神々しささえ覚えるものです。科学の女王陛下たる数学に仕える侍従者たちは、それほど過酷な仕事をしているのであり、また周囲の期待も高いものがあります。

アインシュタインは自らの理論、一般相対性理論を構築するためには、当時まだ生まれたての微分幾何学を駆使しなければならないと感じていました。し

かし数学者には、「一介の物理学者（アインシュタインを「一介の物理学者」と言い切るのもすごいのですが）が手を出してよいものではない」とさえいわれたというのですから、それは困難なことだったでしょう[1]。彼をして、10年余の時間を必要としたのですから。

しかし構築された理論はどうでしょう。この理論の正しさが100％証明されたわけではありませんが、間違っているとも証明されたことはありません。それどころか、ナビゲーションシステム（GPS）では、この一般相対性理論の効果を考慮してはじめて成立します。これを無視すれば誤差が大きくなり、道路を走るべき自動車は船でもないのに海上を走ることになるでしょう[2]。

GPSの精度を上げようとするなら、地球規模の重力場でさえ一般相対性理論効果を考慮しなければならない、ということなのです。

自然法則が純粋論理の数学理論によって表せることは、まことに驚異的なことです。自然は、自らを明かすのに、まるで人類の数学的進歩を俟っているかのようです。量子力学が見出され、その正確性を見るにつれて、一層その感は深まります。量子力学は複素数体系を利用しないことには説明できないのです。

次ページの相関図はかなり大ざっぱなものですが、それでも初めて物理学を学ぼう、志そうという読者にとっては、「一つの目安」になると期待して描いてみました。

まず、**解析学（微積分）**と**線型代数学**がすべての基礎に置かれている事実です。解析学はどちらかというと学習しやすいのだけど、線型代数学は、もともとの成り立ちがかなり意図的だったためか、初めて習う時には相当悩むかもしれません。というのは、線型代数が多元連立方程式を整然と表す方法から始まっていることと関係があります。慣れるまで少し時間が掛かるとしても、物理を学ぶ者としては強力で有用な道具なので、挫けそうになったらそれを信じて習得していただきたい。

さて、「**力学**」。いまでは「**古典力学**」と称されてはいますが、光速に近づかなければ、相対性効果は考えなくてよいし、原子レベルの大きさでもなければ、「古典力学」は物理学の基礎というばかりでなく、実用的でもあるのです。

1　表現方法さえ、まだまちまちで確立されていなかった。

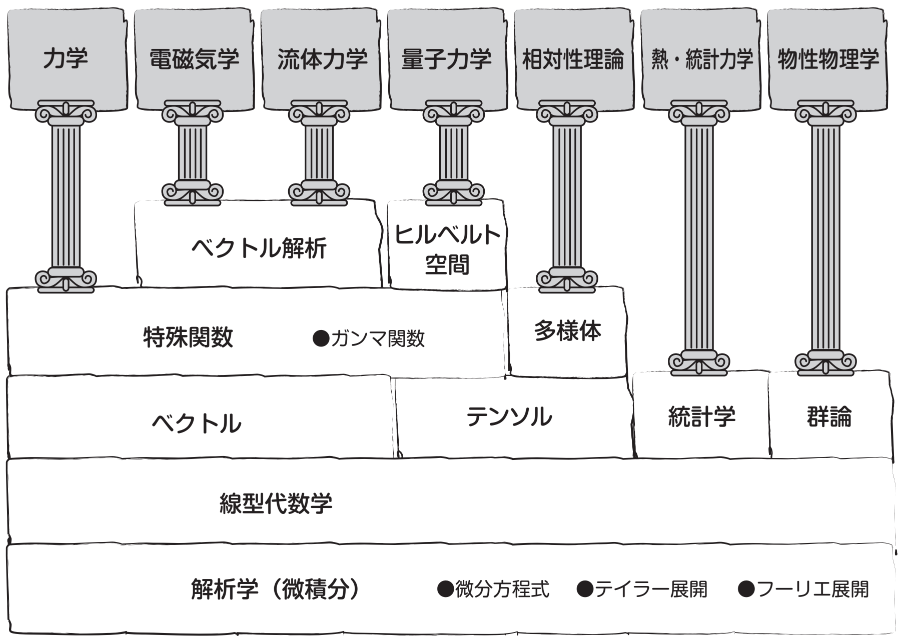
2　筆者の古いナビがそうであった。

実際、古典力学は、**剛体力学**や**流体力学**、津波などの**波動現象**、**天体力学**（一般相対性理論も絡んでくるが）など多岐にわたります。ここで必要なのは、力が方向と大きさを持っているという点で、その意味で、**ベクトル**は外せないし、**ポテンシャル**を考える場合には特殊関数も必要となってきます。振り子運動で揺れが微小ではない場合などでは、楕円関数なども必要となるのです。

流体力学では、「同時に考えなければならない量」が出てくるので、ベクトルでは間に合わず、**テンソル**も必要です。テンソルというのは、ベクトルが基本的に２つの量で表されるのに対して、さらに多くの量を一度に扱える便利な道具のことです。多変数を扱うのだから、ここにも線型代数学が絡んできます。

電磁気学では、「**場**」を考えるために**ベクトル解析**が登場します。「場」は抽象的な概念ですが、これを抜きに電磁気学は考えられないのです。

量子力学は、**複素数**を考えないことには成立しません。当初、数学者の創造



物理学と数学の相関図

物と考えられてきた複素数が、まさか自然を記述するために使われるとは面白い現象です。しかも、無限次元を扱って初めて理解できるので、ヒルベルト空間を抜きには理解できません。

光速に近い運動や重力場がある空間を記述するためには、空間の曲がり具合を記述するために、テンソルや多様体（局所的に座標を設定できる空間のこと）が必要になります。特に**一般相対性理論**では、これなしには記述できませんし、実際、アインシュタイン方程式は、「空間の曲がりは、エネルギー・運動量テンソルで表される」という方程式です。

熱・統計力学は、大ざっぱにいえば、ミクロ的な粒子運動の集積が、マクロの状態（熱、圧力など）を決めるという力学なので、**統計学**の知識が必要になります。

物性物理学は、結晶などを取り扱うので、原子や分子の並び方など、配置の問題を考えるため、それにかかわる**群論**（本書では統計、群論は扱わなかったが…）が必須になってくるでしょう。これは**素粒子物理学**でも素粒子の性質を記述するために必要です。

以上、一気に物理学と数学との関係を見てきましたが、物理学を学ぶ場面でこれらに遭遇したとき、思い出していただければよいと思います。

かつて、アインシュタインは、「なぜ人間が自然を理解できるのか。これこそ私が永遠に理解できないことだ」[3]といいました。完全に知りうるかどうかは別にしても、物理学が数学によって支えられていることは明らかです[4]。

小惑星イトカワを目指して帰還した「はやぶさ（科学衛星MUSES－C)」の快挙は、物理理論が数学的に表現されることによってその軌道を正確無比に計算できたことが一つの要因です。「日本から南米のハエを撃つようなものだ」と揶揄(やゆ)と驚愕(きょうがく)をもって例えられた高精度の計算とコントロールをJAXAは見事にやってのけました。まさしく、数学、物理学の勝利といっていいでしょう。

3 "The most incomprehensible thing about the universe is that it is comprehensible." - Albert Einstein

4 ただ、数学イコール物理学でないことも肝に銘じておかなければならないことは、昨今の物理学の迷走を見ていて感じはしますが…。

最後に一言。こういった論理性は、人間にもともと備わっているものではないかと思います。だからこそ、論理的な数学は、学習の仕方によっては習得しやすいのではないかと、やや我田引水ながらも思います。

本書では、高校数学の領域を越えている部分が多くあります。しかし、突飛なものではなく、必然的に必要と思われたものばかりです。物足りなければ他書を当たることもよいでしょう。そのときでも、ああ、こういう意味だったのかと、その書を繙(ひもと)くときに敷居が下がっていることを実感できるかと思います。

パラパラと本書をめくると、式が多く出てきて、「あ〜っ」と、まるで「あ」に点々が付くほどビックリすると思いますが、むしろ数式が多い方が分かりやすいのです。筆者は実に実感しています。

逆に、数式が少なく、例えば、「この後の計算は略しますが、結果だけ書くと $\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(r,\ \theta,\ \varphi)}=r^2\sin\theta$ となります……」なんて書かれた方が分からないのです。なぜなら数学は思考の流れを止められると分からなくなってしまうからです。ですから、これからは意識を変えて、数式がきちんと書いてある本の方がていねいに書いてあるんだと思ってください。最終的な目的は論理、概念を理解することですから。

どうでしょう。いままで迷宮と思われていた城が、実は理路整然と建てられていたとしたら、冒険心が湧いてこないでしょうか？

ならば、いざ冒険の旅へ！

2011年師走、松本にて
一石 賢

1 なぜ、物理で微分・積分を外せないのか

微積分を勉強する意味が分からない……

物理学や工学といった科学系の学問はもちろんのこと、経済学や医学、心理学など、数学を扱う分野では微積分が外されることはない。なぜなら、「これを外して、数学はない！」からである。

特に、物理数学（もちろん、物理学や工学のための数学）の基本の最たるものは微積分である。これに異論を唱える人はいないだろう。そうでありながら、どうも多くの人がこの入り口で立ち止まってしまうことが多い。どうしてなのか？

いくつか思い付くことがある。まず、「微積分の意味」を明確に示さず、いきなり周辺知識を習得させようとするからではないだろうか。

事実、高校での微積分の授業はともかく、大学に入って微積分（解析学）の授業を受けると、集合論から入ることが多い。この集合論、有限要素の場合はまだしも、無限要素を扱うようになると極端に難しくなる。専門家でさえ、注意しないととんでもない結論を導いてしまう。それはさておいても、集合論は証明方法が独特で慣れるのに時間が掛かるし、無味乾燥なものが多い。だから飽きてしまう。

しかし「面白くありません」と教授に訴えれば、「この程度で音（ね）を上げるようでは数学など身につきませんよ」という決まり文句に打ちのめされ、涙ながら「スビバセン」とすごすごと引き下がるしかない。教授たちは自ら同じようにして学んできたのだから、これがベストの方法であると、無意識に考えているのだろう。

確かに、まず必要な知識を与えておき、最後に本丸を攻めるというのだから、これはこれで間違っているわけではない。しっかりとしたお膳立て、道具揃えがあって、いざ出陣という効率のよい教授法ではある。本丸に攻め込んだとき、必要なものは一切合切用意されているのだから、これほど面倒見のよいこともない。

ただ、このような教授法のみが、本当に「効率」的なのだろうか。その方法で微積分の本質を学生の腑（ふ）に落とすことができるのだろうか。

一見、効率的に見える。しかし、ものを学ぶということは、教授と学生が対峙して初めて成り立つものなのだから、教授側だけの正論で、果たして学生側がそれを理解、納得できるかどうか。

まずは「微積分の意味」を教え、学習する中で、こういった場合はどのようにすればよいのか、こういう問題が出てきたけど、どう解決すればよいのか、とあちこちぶつかりながら進めていった方が、人間の思考過程としては自然じゃないだろうか。

ニュートンは「目的」を知っていた

このようにして微積分を確立した人物はすでにいる。

微積分の創始者の一人であるニュートン（1642 〜 1727）だ。創始者なのだから、微積分という概念を確立するためにどんな道具が必要であるかは、思考、思索を進めていかなければ分からなかったに違いない。おそらくあっちにぶつかり、こっちに問題を抱え、最終的に体系化していったというのが、本当のところだろうと思う（天才だから実際は苦労しなかったのかもしれないが[1]……）。

とはいえ、ニュートンの四苦八苦を現代の人々がそのまま追体験するというのでは、まるで藝がないし、非効率でもある。21世紀の現代に至り、微積分の知識は豊富なのだから、これを踏まえ、適度にニュートンの苦労を疑似体験させながら、教授は的確なアドバイスによって、学生をうまく導くというのが、理想的ではないだろうか。

では、そのために具体的にはどうすればよいのか。

まずは、**目的をはっきりさせること**である。**微積分の意味をきちっと理解させること**である。ニュートンもそこから始めているはずだ。自らの力学を完成

1 「講釈師見てきたような嘘をつき」というが、本当にニュートンがこのような思いをしたかどうかは分からない。

させるには、どうしても微積分の考え方が必要だったからだ。

ひとたび目的が明示されれば、次々と現れてくるだろう問題も、現代の微積分の知識を利用すれば、ニュートンの時代より遙かに早く、効率よく、理解が可能であると思う。

中学生の時、乗鞍登山という行事があった（こんな行事があるのは、おそらく山に囲まれた信州のせいに違いない）。生徒は教師に率いられ、まずは途中の目的地まで到達することが求められる。この際、もし引率者が、途中の目的地さえ「あれが今日の目的地だ」といわず、ただ「ガンバレ！」と声をかけ続けるだけなら、生徒はその中間目的地にさえ到達できないかもしれない。

到達したにしても生徒の疲労は、明確に目的地を示したときの何倍にもなるだろう。こんな調子では、最終目的の登頂は難しい。いったいどれだけ登ればいいのだろう、と疑心は暗鬼を生むのである。これでは体力の配分もできず、結局はへたってしまう。

筆者の時は、こういった状況ではなかったので幸い、登頂を果たしたのであるが。

このように、**いま学習していることが、どういう目的で、これを乗り越えれば、こういう知識が得られる**ということを明確にしていけば、学習者の負担は、大幅に軽減されるに違いない。

ということで、本書でその壮大な実験を始めよう。成功すれば読者と筆者の勝ち、成功しなければ、筆者の負けだ。

1章　微分で物理現象をひもとくと

2 速度から微分を考える

「速度」は直接には測れない？

微分を考えるきっかけとして、ニュートンに従いつつ[2]、速度について考えてみたい。速度は微分の意味を最も明確に示してくれる。

「速さ」という概念が一番最初に出てくるのは、小学校の時だ。そのときには、「速さ＝距離÷時間」[3]と習ったはずだ。決まった時間内でどれだけ進めたか、ということで、分かりやすい定義だ。

しかし、よく詰めて考えてみると、この定義では少々問題も出てくる。それは後で述べるとして、先に時間と距離について述べておこう。時間は、秒、分あるいは時であり、時計なり、ストップウォッチなりで、直接計ることができる。距離は、「直線上での 2 点間の長さ」と定義して、これまた直接計ることができる。単位は、メートル、キロメートル、マイルなどさまざまだ。物理学ではメートル法を採用しているので、こちらの方がよい。

ところで、なぜ「直接」という文字の上に傍点を付けたか、というと、**速度は、直接測れない**からだ。

——陰の声：クルマの速度計があるじゃない？ ●●●●●●●●●●●●●●●●●●

違うんだな。これは、速度計の内部で距離を測定して時間で割って表示してくれるものだから、「直接」ではない。だからこそ、「速度」というのを先ほど定義したわけだ。

このようにして定義した時間と距離を使い、時刻 t から T までの間に、直線上の点 x から X に移動したとすれば、s を速度として、

$$s=\frac{X-x}{T-t}$$

となる。数式にすると急に難しく見えるが、意味していることは上に述べた通

2　ニュートンがどう考えていたかは、忖度するしかないのだが…。

3　このような形で定義された場合、「速度は、単位時間内に進む距離」と言い換えると分かりやすい。「密度は、質量÷体積」なら、「単位体積内の質量」だ。