

# 1 数列

## 等差数列・等比数列

### ● 等差数列

最初の段だけはどういうわけか 30cm の高さで、他は 20cm の高さの階段が続いている。

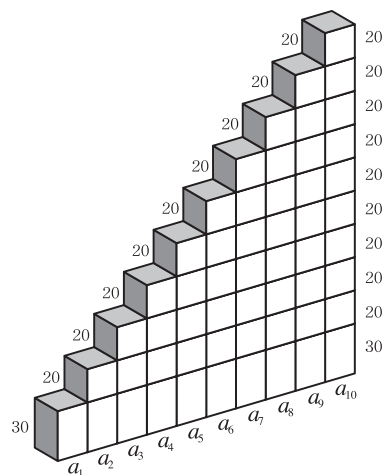
1 段目、2 段目、3 段目、…と階段の高さを並べると、

30、50、70、90、…

という数列ができ、各数を項という。



古代ローマ時代の階段



最初の数をも初項といい、普通  $a_1$  と書く。この場合、初項  $a_1 = 30$  で、いずれの2項間の差も 20 なので、初項 30、公差 20 の等差数列という。

「この階段を 10 段上ったら、高さはいくらになるか」は、「この数列の 10 番目の項  $a_{10}$  はいくら」ということになる。

左図から考えれば、

$$a_1 = 30$$

$$a_2 = a_1 + 20 = 30 + 20 = 50$$

$$a_3 = a_2 + 20 = 30 + 2 \times 20 = 70$$

$$a_4 = a_3 + 20 = 30 + 3 \times 20 = 90$$

...

$$a_{10} = a_9 + 20 = 30 + 9 \times 20 = 210$$

となっている。初項 30、公差 20 の等差数列の  $n$  番目の項  $a_n$  は、初項 30 に公差 20 を  $(n-1)$  回加えればいいので、

$$\begin{aligned} a_n &= 30 + (n-1) \times 20 \\ &= 20n + 10 \end{aligned}$$

となる。

一般に、初項  $a$ 、公差  $d$  の等差数列の  $n$  番目の項  $a_n$  は

$$a_n = a + (n-1)d$$

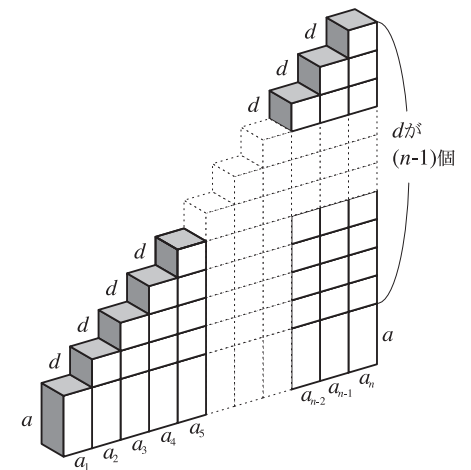
となる。

**問 1** 次の数列はすべて、等差数列である。 $a_{101}$  と  $a_n$  を求めよ。

①  $-5, 0, 5, 10, \dots$

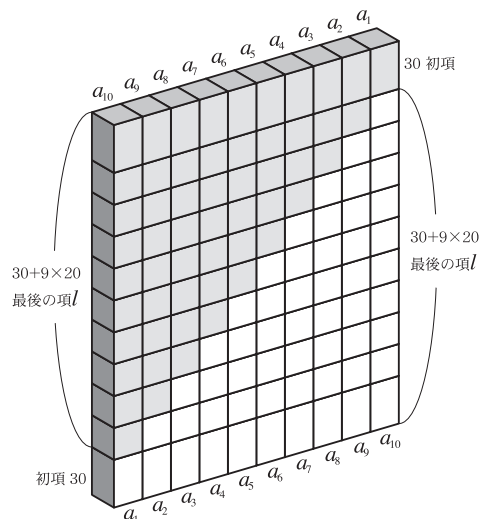
②  $8, 5, 2, -1, \dots$

③  $50, 51, 52, 53, \dots$



数列を「階段の高さの列」とだけ考えると、全部を加える気にはならない。しかし、「毎日もらう小遣いの額」と思うと、加えたい。

等差数列 30、50、70、90、…の初項から 10 番目までの和を考える。



$$S_{10} = 30 + 50 + 70 + 90 + 110 + 130 + 150 + 170 + 190 + 210$$

の値は、図のように  $S_{10}$  の階段を 2 つドッキングすると、横が 10 個で縦が (初項 + 最後の項) =  $(30 + 210)$  の長方形になり、その総数は  $10(30 + 210)$  になり、 $S_{10}$  はその半分なので、

$$S_{10} = \frac{10(30 + 210)}{2} = 1200 \text{ となる。}$$

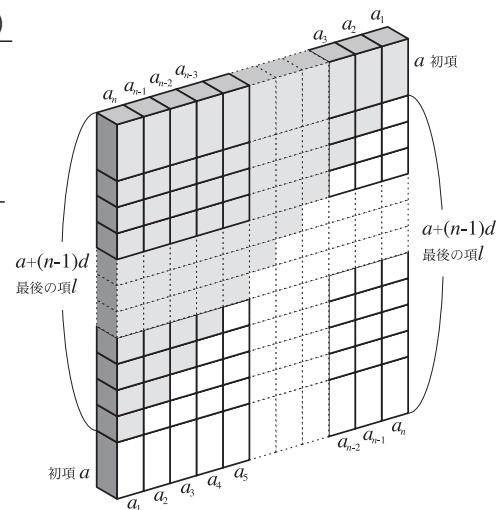
一般のときも、図のように  $S_n$  の階段を二つドッキングすると、横が  $n$  個で縦が (初項 + 最後の項) =  $(a + l)$  の長方形になり、その総数は  $n(a + l)$  である。よって、初項  $a$ 、公差  $d$  の等差数列で初項  $a$  から  $n$  番目の項  $a_n = l$  までの和  $S_n$  は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\text{項数 (初項 + 最後の項)}}{2} \\ &= \frac{n(a + l)}{2} \\ &= \frac{n\{a + a + (n - 1)d\}}{2} \\ &= \frac{n\{2a + (n - 1)d\}}{2} \end{aligned}$$

となる。

**問 2** 次の等差数列の、  
初項から  $a_{101}$  までの  
和と、初項から  $a_n$  までの和を求めよ。

- ①  $-5, 0, 5, 10, \dots$
- ②  $8, 5, 2, -1, \dots$
- ③  $50, 51, 52, 53, \dots$



### ● 等比数列

階段の高さが、前の 1.3 倍になるようにしたらどうなるだろうか。ここでは、まず一般的に考えよう。

数列で、隣り合う 2 項の比が一定であるものを等比数列という。2 項の比が一定であるということは、次の項が前の項の  $r$  倍であるということ。この  $r$  倍を公比という。そこで、初項が  $a$  で、公比が  $r$  の等比数列のとき