第７章　虚数と複素数

■「虚の数」は現実に存在するか？

２乗して－１になる数（$i^2=-1$）を i と表して、「虚数」という。「虚数」は、英語では「Imaginary number」、つまり、「想像上の数」という意味である。

想像上ということは、この世には現実に存在せず、我々が脳裏に描いているだけの抽象概念ということになる。

「整数の３」、「小数の 2.8」、「分数の $\dfrac{2}{5}$」、「負の数（－３)」。これらすべてが抽象的な概念であり、それ自体としては現実に存在しないものであった。

それと同じ意味では、虚数の i も、抽象概念でそれ自体がこの世に存在するわけではない。

しかし、３人、2.8 ℓ、$\dfrac{2}{5}$ kg、（－３）万円などは、具体的な量として存在するのであった。これと同じように、i を使って表せる具体量は存在しうるのである。

i の存在をわかりやすくするためには、はじめに「複素数」から導入したほうがよい。

■ 複素数の存在

「数」は、はじめは集合数としての「自然数」であり、ついで、連続量の大きさを表すための「小数」と「分数」が出てきた。さらに、負の量の大きさを表すための、負の数が認識される。負の数には、自然数の負の数、小数の負の数、分数の負の数がある。

これらの数を総称して、「実数」とよんでいる。

これまでの数すなわち実数は、数直線上に表すことができた。自然数も、整数も、小数も、分数も数直線の上に点をとって示すことができた。負の数も、原点から反対方向へ点をとればよかった。

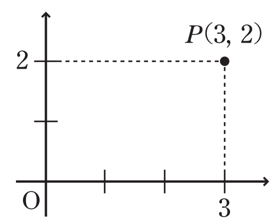
しかし、これまでの数直線の上には、$i^2=-1$ という虚数 i はのっていないのである。

実は、虚数は、横だけの直線上にはなく、縦と横で表される、平面上にのっているのである。

このことを発見したのはガウスというドイツの数学者・物理学者であったが、彼も最初はこっそりと使っていたのである。今では、複素数を表す平面のことを、「複素平面」あるいは「ガウス平面」とよんでいるほどである。

平面上の点は、横座標と縦座標のセットで表すことができる。(3, 2）という点は、横へ３、縦へ２行った地点を表している。これをベクトルということもある。

縦の座標と横の座標の組み合わせで表せる点なので、「複数の値をもつ点」という意味で、「複素数」というのである。

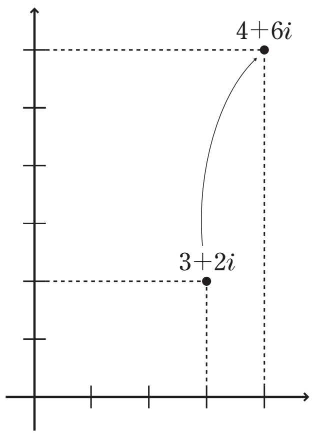


「虚数」に対して、今までの数を「実数」というので、今までの数直線は横軸に取り、「実数軸」とよぶ。

縦軸を「虚数軸」として、(3, 2) は、$3+2\boldsymbol{i}$ と表していこうというのである。$\boldsymbol{i}$ は、単に、i と表すことにする。しかし、「数」というからには四則演算が定まっていなくてはならない。

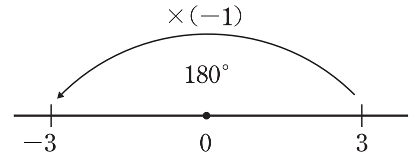
足し算と引き算は自然に、次のように定める。

$$(3, 2)+(1, 4)=(3+1, 2+4)=(4, 6)$$
$$(3+2i)+(1+4i)=(3+1)+(2+4)\ i=4+6i$$
$$(3, 2)-(1, 4)=(3-1, 2-4)=(2, -2)$$
$$(3+2i)-(1+4i)=(3-1)+(2-4)\ i=2+(-2)\ i$$



問題は「かけ算」である。かけ算のヒントは、「(−1) をかけると、向きが逆になる、すなわち、180 度回転する」という事実である。

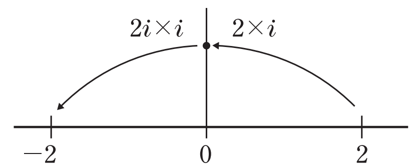
ここで、「180 度回転」という考えが大事である。数直線だけ考えていたときは、マイナスの数をかけると、「反対側にいく」ということでしかなかった。しかし、平面を考えると、反対側にいくということは、180 度回転すること、と新しい思想が見えてくるのである。



■ 複素数のかけ算

ある数に i をかけるとは、どういうことかを考えたとき、$i\times i=-1$ なのであるから、「i を 2 度かけると 180 度回転する」となることがわかる。

以上のことから、「i を 1 回かけるということは、90 度回転すること」という新しい考えにいきつく。



複素数のかけ算が、回転と関係していることがわかったので、複素数を表すのに、「極座標」での表示が便利であることがわかってくる。

つまり、原点からの距離と、母線からの回転角で点の位置を表すのである。

$$(x, y)=x+yi=\langle r, t\rangle$$