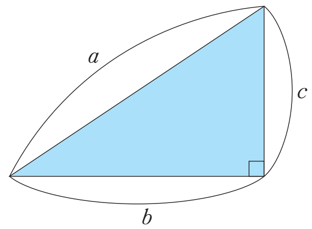
§18 三平方の定理

直角三角形の斜辺の長さの 2 乗は、残る 2 辺の長さの 2 乗の和に等しい。

$$a^2=b^2+c^2$$

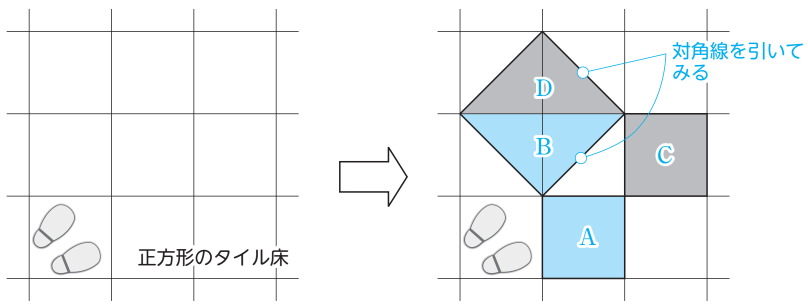
（注） 逆も成立します。つまり、「三角形において、2 辺の長さの 2 乗の和が残りの 1 辺の長さの 2 乗に等しいとき、この三角形は直角三角形となる」



解説！ タイルに補助線を引く

三平方の定理（**ピタゴラスの定理**）は、床に敷き詰められたタイルを見てピタゴラス（B.C.580 頃～ B.C.500 頃）自身、あるいはピタゴラス学派の人々が発見したといわれています。

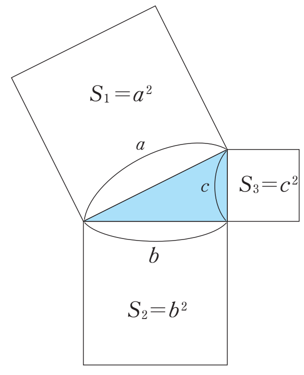
正方形のタイルの床に対角線を描いてみると（右下図）、青い正方形 A の面積は、青い二つの三角形 B の面積の和に等しく、グレーの正方形 C の面積はグレーの二つの三角形 D の面積の和に等しいことが分かります。したがって、四つの三角形で作られた大きな正方形の面積（斜辺の 2 乗）は、青とグレーの小さな正方形の面積（斜辺でない辺の 2 乗）の和になっているといえます。



このことから、一般の直角三角形でもその斜辺（一番長い辺）を一辺とする正方形の面積 S_1 は、残りの 2 辺を一辺とする正方形の面積 S_2 と S_3 の和に等しいと思われます。つまり、

$$S_1=S_2+S_3$$

この式で、直角三角形の斜辺を a、他の 2 辺を b、c とし、辺の長さで表現すると「$a^2=b^2+c^2$」となり、三平方の定理の予感がします。



$a^2=b^2+c^2$…の予感

（注） バビロニアでは紀元前 2000 年頃までには三平方の定理が発見され、使われていた。

●数学で最重要な定理

この三平方の定理は、数学のいろいろな分野の土台となる極めて重要な定理といえます。距離の公式をはじめ、この「三平方の定理」なしでは語れない数学がたくさんあるからです。

なぜ、三平方の定理は成り立つのか？

三平方の定理は実に多くの証明がありますが、ここでは、数式を使わずに直観的に理解できるものを一つ紹介しておきます。

まず、斜辺の長さが a で他の 2 辺の長さが b、c である直角三角形（下図 1）を、一辺の長さが $b+c$ である正方形の四隅に配置します（下図 2）。

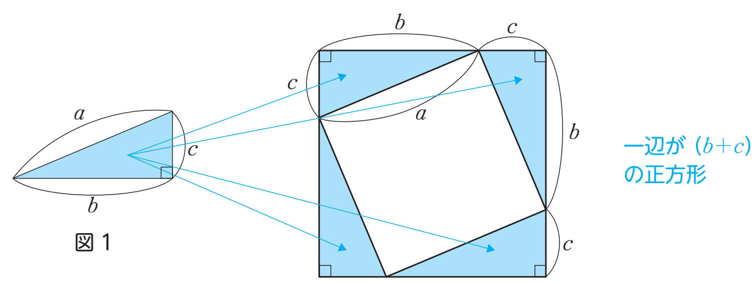
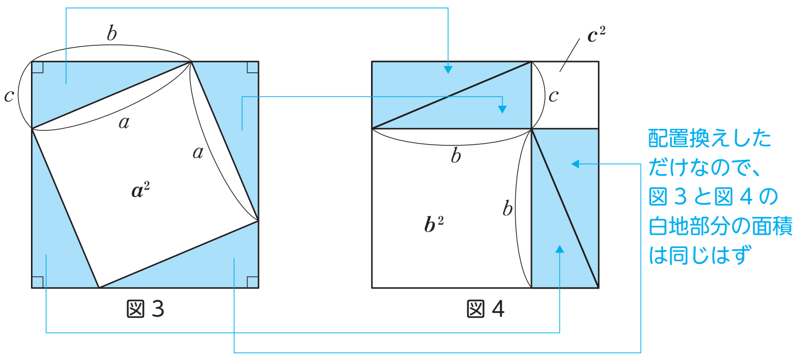


図 1　図 2

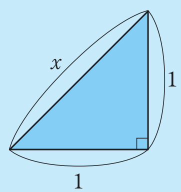
　次に、この同じ正方形の枠内で直角三角形を下図のように配置換えします。



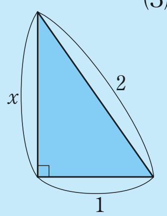
　このとき、図３と図４の白い部分の面積は等しいはずです。したがって、「図３の白い正方形の面積 ＝ 図４の２カ所の白い部分の正方形の面積の和」となります。これを式で書くと　$a^2=b^2+c^2$　となります。

〔例題〕次の(1)〜(3)の直角三角形において x の値を三平方の定理を使って求めてください。

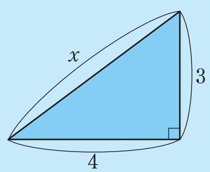
(1)



(2)



(3)



［解］

(1)　$x^2=1^2+1^2=2$　ゆえに　$x=\sqrt{2}$　$(x>0)$

(2)　$x^2+1^2=2^2$　よって　$x^2=2^2-1^2=3$　ゆえに　$x=\sqrt{3}$　$(x>0)$

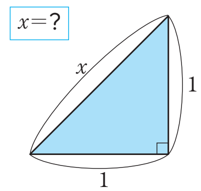
(3)　$x^2=3^2+4^2=25$　よって　$x=5$　$(x>0)$

“整数と分数で成り立っている” と考えたピタゴラス

　ピタゴラスが活躍したのは紀元前６世紀の古代ギリシャ時代（日本は弥生時代）のこと。ピタゴラスは直角三角形の性質をはじめ、あらゆる事柄の背後に「数の秩序」が潜んでいると考え「**万物は数である**」と主張し「数」を崇（あが）める宗教として、ピタゴラス教団を設立しています。

　ピタゴラス教団は「この世界は、整数とその比（分数）によって、秩序を保っている」と主張していたのですが、皮肉なことに、自らが発見した「三平方の定理」は、整数でも分数でもない数の存在を示していました。

　例えば、２辺の長さが１で、斜辺が x の直角三角形の場合です。これを満たす斜辺 x は、整数や分数では表せません (前ページを参照)。ピタゴラスは、このような数の存在を「決して口外してはならない」として隠してしまったのです。



参考

ピタゴラス数とフェルマーの大定理

　$x^2+y^2=z^2$ を満たす自然数 x、y、z を**ピタゴラス数**といい、

　$(x=3、y=4、z=5)$、$(x=5、y=12、z=13)$、$(x=8、y=15、z=17)$ などがあります。

　奇数 m に対して、m、$\dfrac{m^2-1}{2}$、$\dfrac{m^2+1}{2}$ はピタゴラス数になるので、ピタゴラス数は無数に存在することが分かります。

　ところが、$x^3+y^3=z^3$ を満たす自然数 x、y、z となると事情が一変します。なぜなら、「３以上の自然数 n について、$x^n+y^n=z^n$ を満たす自然数 x、y、z の組は存在しない（**フェルマーの大定理**）」からです。この定理は 1995 年、アンドリュー・ワイルズ（1953 〜）によって証明されたばかりです。

§81

区分求積法

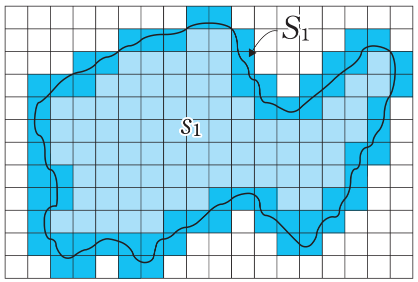
図形の面積や体積などを求めるのに、まず、これをいくつかに分割し、個々の面積や体積を求めやすい図形のそれで近似して和を求める。その後、分割をさらに細かくしたときの極限値をもって、もとの図形の面積や体積を計算する方法を**区分求積法**という。

解説！ 区分求積法

区分求積法の考え方は素朴なものです。求めにくいモノは、分割し、求めやすいモノで近似して計算していこうという考え方です。

●池の面積を方眼紙で

このような考え方は、例えば地図上の池の面積を求める際にも使っています。右図のように、地図上の池の上に方眼紙を載せて、池の内側にある正方形（面積が求められる）の総和を s_1 とし、内側と境界線を含む正方形の面積の総和を S_1 とします。

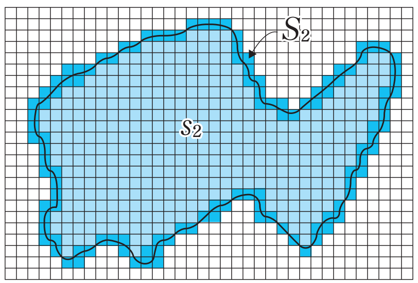


池の面積を X とすれば、

$$s_1 < X < S_1$$

となります。

次に、さらに目の細かい方眼紙を載せたときの内側の正方形の面積の総和を s_2 とし、内側と境界線を含む正方形の面積の総和を S_2 とします。すると次の不等式が成立します。



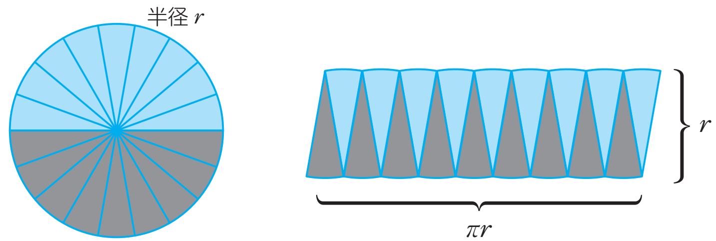
$$s_1 < s_2 < X < S_2 < S_1$$

このようにして、どんどん目の細かい方眼紙を用いて処理していき、X が一定の値に収まることが見えたとき、この値を「池の面積」としたわけです。

〔例題〕半径 r の円の面積は πr^2 ですが、これを区分求積法でどう求めるかを考えてください。

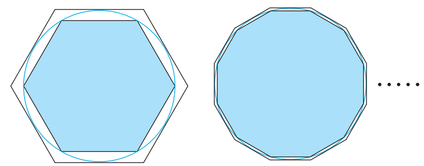
［解］この問題を解くために、①円の中心角を等分割し、円を細かな扇形に分割します。次に、②その扇形を右図のように上下互い違いに配置して帯状に並べます。

この分割をドンドン細かくしていくと、こうしてできる図形は横が円周の半分、つまり πr で、縦が半径 r の長方形に近づいていくことが分かります。よって、半径 r の円の面積は πr^2 であることが分かります。



ケプラーの樽の求積法

区分求積法は積分法の起源となった考え方で、その考えは紀元前のアルキメデス（取り尽くし法）や16～17世紀のケプラー（ビール樽の求積法）も採用しています。



アルキメデスは取り尽くし法で円の面積を計算した

§82

積分法

　関数 $f(x)$ が区間 $a \leqq x \leqq b$ で定義されているものとする（図 1）。ここで、この区間を n 等分し、各区間の境界点に x_0、x_1、x_2、……、x_n と名前を付けて（図 2）、次の和を考える。

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \quad \cdots\cdots ① \qquad \text{ただし、} \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

　この分割を限りなく細かくしたとき、つまり、$n \to \infty$ にしたとき、①が一定の値に近づけば、関数 $f(x)$ は区間 $a \leqq x \leqq b$ で**積分可能**であるといい、その一定の値を記号 $\int_a^b f(x)dx$ で表す。すなわち、

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \quad \cdots\cdots ②$$

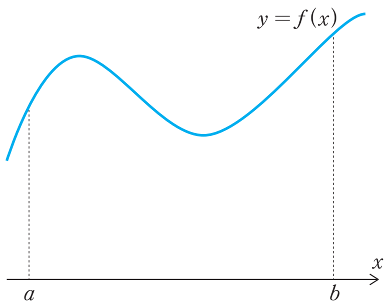


図 1

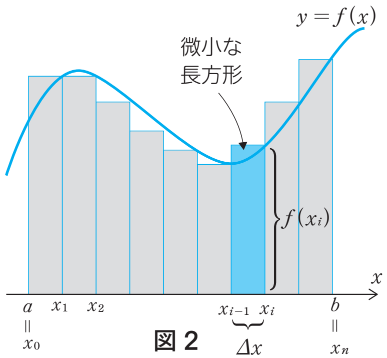


図 2

区間［a, b］の微小な長方形をすべて足す

（注 1）　区間 $a \leqq x \leqq b$ を**閉区間**といい、記号［a, b］で表します。また、区間 $a < x < b$ を**開区間**といい (a, b) で表します。

（注 2）　記号 Σ は和を表す記号で、$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$

（注 3）　本節で定義された積分は**リーマン積分**と呼ばれ、関数が連続であることが前提になっています。連続でない場合に拡張した積分法に**ルベーグ積分**があります。

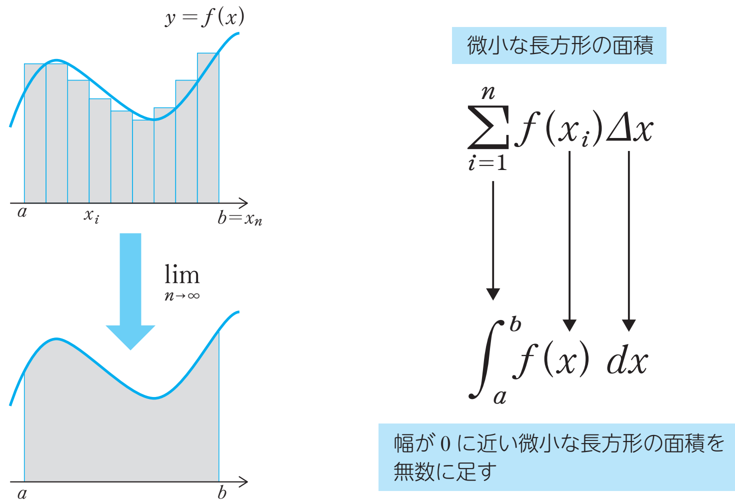
解説！　積分とは？

　$\int_a^b f(x)dx$ を「関数 $f(x)$ の a から b までの**定積分**」といいます。

　定積分は $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ の形でも分かるとおり、$f(x_i)$ と Δx を掛けたもの、つまり**微小な長方形の面積を無限に足していったとき、その和が限りなく近づく値**のことです。なお、$f(x)$ のことを被積分関数といいます。

●なぜ、記号 $\int_a^b f(x)dx$ が使われたのか

　n 分割したときの個々の長方形の面積 $f(x_i)\Delta x$ は、分割を細かくしていくと幅が 0 に近い微小な長方形になります。この長方形を $f(x)dx$ と表現します。定積分は閉区間［a, b］にある、これら無数の微小な長方形をすべて足していくので、S（和の意味を持つ sum の頭文字）を利用し、この S を縦方向に伸ばして $\int_a^b$ と書いたのです。この原理が分かると、いろいろな現象を簡単に積分に置き換えることができます。



（注）　積分とは**分**けた長方形を**積**んでいくことです。

●積分の定義から導かれる定積分の性質

$\int_a^b f(x)dx$ は次のように定義されました。

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varDelta x=\lim_{n\to\infty}(f(x_1)\varDelta x+f(x_2)\varDelta x+\cdots+f(x_n)\varDelta x)$$

このことから分かるように、定積分は $f(x_i)\varDelta x$ を無限に足す計算なのです。このように無限に足す計算のことを**無限級数**と呼びます。定積分の定義と無限級数の性質から、定積分には次の性質があることが証明できます。

定理1　関数 $f(x)$ が閉区間［a, b］で連続（グラフが切れ目なくつながっている）ならば、$f(x)$ は区間［a, b］で積分可能である。

定理2　連続関数 $f(x)$、$g(x)$ に対して次のことが成立する。

(1) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$　　ただし、k は定数

(2) $\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

（a、b、c の大小は無関係）

(4) ［a, b］で $f(x)\geqq 0$　ならば　$\int_a^b f(x)dx\geqq 0$

(5) ［a, b］で $f(x)\geqq g(x)$　ならば　$\int_a^b f(x)dx\geqq\int_a^b g(x)dx$

（注）$f(x)\geqq 0$ のとき、$\int_a^b f(x)dx$ は区間［a, b］で関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸、それに、2直線 $x=a$、$x=b$ によって囲まれた図形の面積の定義につながります（§90）。

〔例題〕次の定積分を計算してください。

(1) $\int_0^1 x^2\,dx$　　(2) $\int_0^2 x^3\,dx$

［解］

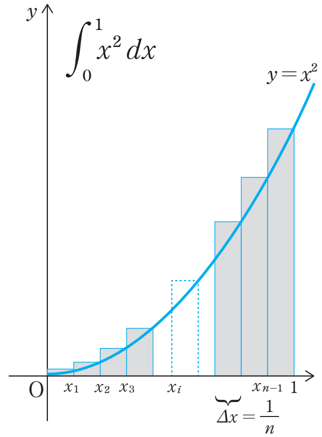
(1) $\int_0^1 x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots n^2}{n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$

$=\frac{1}{6}(1+0)(2+0)=\frac{1}{3}$



（注） $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$　（§62）

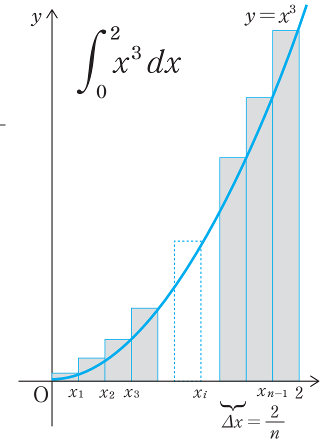
(2) $\int_0^2 x^3\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)^3\frac{2}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{16(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)}{n^4}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2(n+1)^2}{n^4}$

$=\lim_{n\to\infty}4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$

$=4(1+0)^2=4$



（注）$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$　（§62）