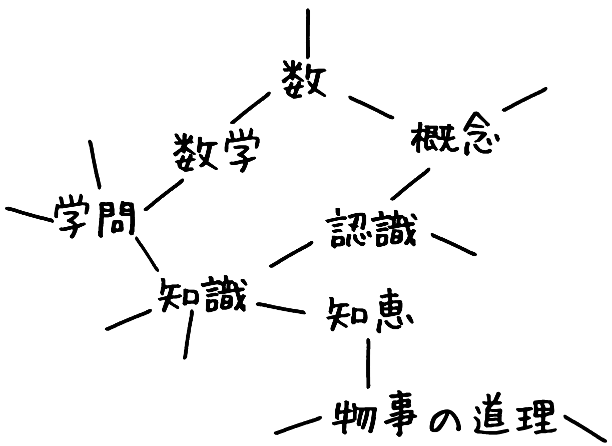
1　公理、定義、定理とは ??

　数学を勉強する上でまず大切なのは必要な単語の定義を明らかにすることです。しかしいくら単語 A を単語 B で説明しても、ではその単語 B はどういう意味？ となります。そうしてどんどん問うていっても根源的な何かがあるわけではなく単語同士の関係にすぎず、結局は一人一人が獲得している単語の意味に依存してしまうので、厳密に絶対的な単語の定義をすることは不可能なのです。これに関しては数学はただルールに基づいた記号の羅列と考える立場もあり、とても興味深い学問体系を形成していますが、ここではこの本を読むことができる程度の言語を仮定して進めていきたいと思います。



　まず次の 3 つを見てください。

1. 「宇宙の始まりがあるという共通認識で話を進めていこう」
2. 「何でも知っていて何でもできる人のことを神っていうんだよ」
3. 「日本人は押しに弱いから押せば契約とれるんだ！」

　この 3 つの違いが分かりますか？ これらは数学の文章を読む上でとても大きな違いがあります。それぞれについて数学ではどのようになるか例を挙げてみます。

1. 「2 つの点が与えられたとき、その 2 点を通るような直線を引くことができることとする」
2. 「1 以外の自然数で 1 とその数しか約数を持たないものを素数という」
3. 「素数は無限個存在する」

　どうでしょう？ なんとなく違いが見えてきましたか？ それぞれについて解説していきたいと思います。

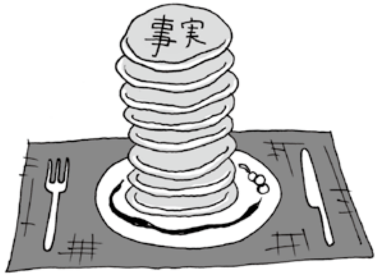
1．公理

　上の例の 1. は数学では**公理**（**Axiom**）と呼ばれます。公理の意味は

理由なく正しいとする文章

のことです。数学は必ず一つ一つ理由があって事実がパンケーキのようにお皿に積み上げられていきます。積み上がったものは正しいと認められている事実で、それを使って新しい事実を積み重ねていく作業をします。で

すが一番下の事実をお皿に載せるときには認められた事実は何も無い状態です。そこで**無条件**でいくつか事実をおいておく。この無条件で認められた事実が公理です。また公理を一つだけでなくいくつか認めてお話を進めることもあります。このとき、いくつか集まった公理をまとめて**公理系**といったりして「この公理系を採用して進めようと思う」というような使い方をします。



とはいえ、数学書の中でも公理としてどのようなものを採用して進めるか厳密に記してから進めているものは多くなく“数学書を読む中での一般的な公理”を暗黙で認めて進めて、一般的な公理から外れるもののみ特記しているケースが多いようです。公理を全て知っていて数学書ごとにどれを使っているかチェックして進める必要はありません。読み進める上でキーになる公理は必ず載っているはずですので、そこで確認して進めていくとよいかと思います。30 ページにあるように本書では以下のような公理をまず定めていました。

公理 1.1.1
読者は日本語の文章を理解できるものとする。

2. 定義

2. は**定義**（**Definition**）と呼ばれるものの例です。先ほどから何度か定義が大切といっていましたが、やっとその定義の定義をすることができます（混乱してきました）。定義の意味としては次のように捉えておきましょう。

議論を進めるために人が勝手に作った取り決めを記した文章

主に使う言葉を取り決めます。使う言葉を取り決めておかなければ各々が違う世界に迷い込んでいってしまいますよね。そうなると内容について会話することが非常に困難になってしまいます。定義について気をつけたいことは「同じ言葉でも本によって定義が異なる場合がある」ということです。例えば次の二つを見てください。大学数学の内容を含みますので読み飛ばしてしまっても構いません。

(i) $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とし、e を底とする指数関数 $y=e^x$ を考える

(ii) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\cdots$ を考える

ほとんどの教科書は (i) の前半をネイピア数“e”の定義として採用してその指数関数としての $y=e^x$ を考え、のちに (ii) の事実が認められることを示しますが、逆の順番で (ii) のように e^x とかく関数を先に定義しておいて、その定義のもとで $y=e^x$ は指数関数になっていることと、その底が $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ と一致すること、つまり(i)を確かめることができます。よく見受けられるのが (i) のようにネイピア数“e”を勉強したことがあり、後者のように (ii) を定義とするような教科書 X に出会ったときに、その教科書 X でのネイピア数 e の定義が何かを明確にしないで、

e は

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

であり

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\cdots$$

に $x=1$ を代入したものでもある。

とまるで e の定義が 2 つあるかのように理解してしまう状況です。一つの対象について定義は一つしかありえないということをしっかり押さえておきましょう。こういうわけで、話し手の定義が何かを考えることはとても重要なことである、と分かっていただけたかと思います。

そして呼び名が大切なのではなく「対象そのものが何であるか」も大切です。先ほどのネイピア数“e”を表す式を理解することよりもネイピア数の対象が何であるかを理解することの方が簡単です。実際ネイピア数は数です。式が分からなくても、数であるということが分かればそれは理解に一歩近づいている証拠です。公理と定義の明確な線引きが分かりにくいこともありますが[*1]本書では性質の約束事を「公理」、言葉の約束事を「定義」と呼んでいきます。

3. 定理

最後に 3. です。これは**定理**（**Theorem**）と呼ばれるものです。定理の意味とは、

＊1　私は「定義」は議論のパラメータ、「公理」は議論の“ハイパラメータ”だと考えています。しかし原稿を読んでいただいたところ「公理」は「多数の人が経験的に認める約束事」、「定義」は「経験はないが決める約束事」といった気持ちの面に由来するものである、という意見をいただきました。皆さんも公理や定義に出会うたびに考えてみてください。

公理から導き出され、定義された言葉のみで構成された正しいことが証明できる文章

のことです。数学の本で“定理”が出てきたときは、正しいことを、公理と今までに証明された定理を用いて証明しましょう。ほとんどの数学書は定理の後に証明が載っています。勉強するときはその証明を読んでおわりにせずに、腑に落ちるまで考えて、次へ次へと読み進んでみましょう。

例

定理と証明の例を挙げます。

定理 1.1.2
$0.9999\cdots=1$ である。

証明

① $x=0.999\cdots$ とする

② $10x=9.999\cdots$

② − ①より

$9x=9$

$x=1$ □

※証明の最後には□をつけて証明が終わったことを視覚的にすぐ判断できるようにしています。

このように「○○は△△です」と主張したものが定理で、それがなぜ正しいか根拠を明らかにしたものが証明です。ただし上の主張を定理と呼ぶためには、$0.999\cdots$ と 1 がそれぞれ別々に定義されて、さらに公理や他に証明済の定理のみを使って証明される必要があります。というのも、使っている $0.999\cdots$ の“$\cdots$”という表現は何を意味するのか明らかにされてい