§1　$T^r(V)$とテンソル積⊗

Vを2次元線形空間とし，Vの基底として，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$をとります。

Vの任意の元は$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$の1次結合として表すことができました。

例えば，$V=R^2$（2次元実数ベクトル空間）とすれば，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$として，

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

をとることができます。R^2の任意の元は，$k\boldsymbol{e}_1+l\boldsymbol{e}_2$（$k$，$l$は実数）の形に表すことができます。基底のとり方はこれ以外にも，無数にあります。

上では，なじみが深い例で，線形空間において基底をとることができる実例を示しましたが，逆に基底を決めて，それらが張る線形空間を定めることもできます。

例えば，「あ，い を基底に持つ2次元の線形空間」というものも考えられます。あ，いの正体はよく分からないけれども，これを基底と定めたので，この線形空間では，

(3あ＋2い)＋(1あ＋3い)＝4あ＋5い

3(3あ＋2い)＝9あ＋6い

という計算が成り立ちます。あ，いをx，yにするとなじみ深い多項式の計算になります。

このように，基底がどんなものであっても係数だけで計算できるのが，線形空間なのです。これは，係数が実数である2次元線形空間は，R^2と同型であるということでもあります。

2つの2次元線形空間VとWがあるとします。ここで，「⊗」という記号を導入します。2次元線形空間Vの基底$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$とWの基底$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$を

もとに，

$$\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_1\qquad \boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_2\qquad \boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_1\qquad \boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_2$$

という4個の記号を作ります。

これらを基底として，実数を係数として持つ4次元線形空間を$V\otimes W$と表し，**VとWのテンソル積**といいます。

一番初めに出した基底の例$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$では，高校より慣れ親しんだ矢印ベクトルでイメージ化しましたが，テンソル空間の基底はすぐ前に出した「あ，い」のように具体化しないで，そのまま基底であることを受け止めてください。

$V\otimes W$の元の具体例は，

$$3\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_2+5\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_2$$

です。このテンソルの$\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_2$成分は$-2$です。

$\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_2$が基底ですから，和やスカラー倍については，

(−2)+(−1)=−3

$$(-3\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_1\underline{-2\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_1})+(2\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_1\underline{-1\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_1})=-\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_1\underline{-3\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_1}$$

$$3(2\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_1-1\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_1)=6\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_1$$

などと成分ごとに計算します。

$V\otimes W$の元Sをおくときは，

$$S=S^{11}\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_1+S^{12}\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_2+S^{21}\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_1+S^{22}\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_2$$

と成分をおきます。このように基底の下添え字と対応するように，上に添え字を書いておくと，あとあとまでしっくりいきます。

上のSを，Σを用いて書くと，

$$\sum_{i=1,2}\underset{j=1,2}{S^{ij}}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{a}_j$$

となります。1章で紹介したアインシュタインの縮約記法を用いるとΣを省略して，

$$S^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{a}_j$$

と，すっきり表すことができます。

ここで，S の上添え字も，$\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}$ の下添え字も左から i, j と同じ順序で振られていますが，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{e}$ を入れ換えて $S^{ij}\boldsymbol{a}_j\otimes\boldsymbol{e}_i$ と表すことも可能です。S の添え字の 1 番目である i と V の基底 $\boldsymbol{e}_i$，S の添え字の 2 番目である j と W の基底 $\boldsymbol{a}_j$ が対応していればよいのです。

線形空間 V, W の 2 つの元 S，T に対して，$V\otimes W$ の元を対応させる $S\otimes T$ という計算を次のように定めます。ポイントは，$\otimes$ を普通の積と見て展開公式のように計算するところです。

例えば，$S=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，$T=-2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
S\otimes T&=(2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)\otimes(-2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\\
&=\underbrace{2(-2)\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_1}_{①}+\underbrace{2\cdot1\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_2}_{②}+\underbrace{3(-2)\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_1}_{③}+\underbrace{3\cdot1\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_2}_{④}\\
&=-4\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_2-6\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_2
\end{aligned}
$$

と計算します。

このような計算ができるのは，演算 $\otimes$ が，実数 k とベクトル S，T，U について，

$$
\begin{aligned}
k(S\otimes T)&=(kS)\otimes T=S\otimes(kT)\\
(S+T)\otimes U&=S\otimes U+T\otimes U\\
S\otimes(T+U)&=S\otimes T+S\otimes U
\end{aligned}
$$

という計算法則が成り立つものと定めているからです。

演算 $\otimes$ を**テンソル積**といいます。

線形空間 V，W からそれぞれ 1 つずつ元 S，T をとり，$S\otimes T$ を計算すると $V\otimes W$ の元になりますが，$V\otimes W$ の元がすべて $S\otimes T$ の形で表されるわけではないことに注意しましょう。

例えば，$\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_2$ は，$S\otimes T$ の形では表せません。

すなわち，$S\otimes T=\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{a}_2$ を満たす V の元 S，T は存在しません。

ここで，W を V として，$V\otimes V$ というテンソル積の空間を考えましょう。

つまり，2 次元線形空間 V の基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ から作る，

$$\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1\qquad\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2\qquad\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1\qquad\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2$$

という 4 個を基底とした 4 次元線形空間を考えます。これは $T^2(V)$ と表され，2 階の**反変テンソル空間**といいます。

反変という言葉に違和感を持った方のために，なぜ 2 階の反変と呼ばれるかについてざっくりいうと，$T^2(V)$ の成分の変換則を表すときに，V の基底を取り換える行列の逆行列を 2 個用いるからです。詳しくは 5 節で，共変テンソルという用語とともに説明します。

$T^2(V)$ の元 S は，$S^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ または $S^{ij}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_i$ と表します。添え字がある場合は，どちらの表記でも混乱は生じませんが，S^{ij} を具体的な数値にすると少々まずいことが起こります。

$S^{11}=3$, $S^{12}=4$, $S^{21}=5$, $S^{22}=6$ のとき，$S^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ と表すのであれば，

$$3\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2+5\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1+6\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2 \tag{3.01}$$

$S^{ij}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_i$ と表すのであれば，

$$3\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1+5\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2+6\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2 \tag{3.02}$$

となります。

$V\otimes W$ の場合は，V の基底と W の基底が別物なので，$S^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{a}_j$ と $S^{ij}\boldsymbol{a}_j\otimes\boldsymbol{e}_i$ の S^{ij} を具体的な数にしても $V\otimes W$ の元が 1 つに定まりますが，$T^2(V)$ の場合には，$\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2$ に係数を付けた式からだけでは，$S^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ で表しているのか，$S^{ij}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_i$ で表しているのか判断できません。ですから，厳密にいうと表記の仕方を宣言しない限り，(3.01)，(3.02) のような表現では $T^2(V)$ の元が定まらないことになります。

しかし，特に断りがなければ，(3.01)，(3.02) のような式で与えられ

たテンソルは，$S^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$で解釈することにしましょう。$S^{ij}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_i$のような表記を許しておくのは，あとあとテンソル積の計算をするときにその方が便利だからです。そのとき，また注意を促すことにします。

$T^2(V)$の元Sの主役は，$S^{11}=3$，$S^{12}=4$，$S^{21}=5$，$S^{22}=6$という成分と数値の関係が本質であって，基底は添え物であると考えていたらよいでしょう。

次に，$T^3(V)$という線形空間を紹介しましょう。3個の$\boldsymbol{e}_1$と$\boldsymbol{e}_2$を⊗で組み合わせた，

$$\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2$$
$$\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2$$

という8個のものを基底とした8次元線形空間が$T^3(V)$です。これを3階の反変テンソル空間といいます。Vが2次元なので基底に含まれるベクトルが2個あり，$T^3(V)$の基底は$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$のどちらかを3個並べたものなので，2^3(個) になります。

続いて，$T^4(V)$であれば，基底は$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$のどちらかを4個並べたものなので，基底に含まれるベクトルの個数は2^4(個) になり，次元は$2^4=16$になります。

話は戻りますが，ベクトル空間Vはテンソル空間$T^1(V)$であるといえます。

$T^2(V)$の元Sと$V(=T^1(V))$の元Tについても$S\otimes T$を計算することができます。このとき，$S\otimes T$は$T^3(V)$の元になります。

$S=-3\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1$，$T=3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2$であれば，

$$S\otimes T=(-3\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1)\otimes(3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2)$$
$$=\underbrace{-9\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1}_{①}\underbrace{-12\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2}_{②}\underbrace{+6\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1}_{③}\underbrace{+8\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2}_{④}$$

と計算できます。

ここまでのことをまとめておきます。

定義 3.01　$T^r(V)$または$\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r\text{コ}}$

Vをn次元線形空間，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$をVの基底とする。これらを組み合わせて作るn^r個の

$$\underbrace{\boldsymbol{e}_\square\otimes\boldsymbol{e}_\square\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_\square}_{r\text{コ}}\ (\square\text{には1から}n\text{までの数が入る})$$

を基底とするn^r次元線形空間をr階の反変テンソル空間といい，$T^r(V)$または，$\underbrace{V\otimes V\otimes\cdots\otimes V}_{r\text{コ}}$で表す。$T^r(V)$の元$S$は，

$$S^{ij\cdots k}\underbrace{\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_k}_{r\text{コ}}\quad \text{アインシュタインの縮約記法}$$

と表される。$S^{ij\cdots k}$をテンソルの成分という。

r階の反変テンソル空間$T^r(V)$の元Sとs階の反変テンソル空間$T^s(V)$の元Tが与えられると，SとTのテンソル積$S\otimes T$を作ることができます。

$S\otimes T$は，$(r+s)$階の反変テンソル空間$T^{r+s}(V)$の元になります。

反変テンソル空間についてテンソル積⊗の成分計算をまとめると，次のようにまとまります。

定義 3.02　$T^r(V)$のテンソル積

$\boldsymbol{e}_1$，…，$\boldsymbol{e}_n$をVの基底とする。$T^2(V)$の元$S=S^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$（成分は$n^2$個）と$T^1(V)$の元$T=T^k\boldsymbol{e}_k$（成分は$n$個）のテンソル積$S\otimes T$を$U$とすると，成分は$U^{ijk}=S^{ij}T^k$で定められ，

$$S\otimes T=S^{ij}T^k\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k\ (\text{成分は}n^3\text{個})$$

アインシュタインの縮約記法

$T^r(V)$の元S（成分はn^r個）と$T^s(V)$の元T（成分はn^s個）のテン

ソル積 $S\otimes T$ も上に倣うことが分かるでしょう。$S\otimes T$ の成分は n^{r+s} 個になります。

テンソル積は交換不可能，非可換という言葉を聞いたことがある人のために，以下コメントしておきます。

線形空間 V の基底 $\boldsymbol{e}_i$ を $\otimes$ を組み合わせて作ることができる，$\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$，$\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k$，…，すべてを基底とする線形空間を V のテンソル代数といいます。このとき $\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2$ と $\boldsymbol{e}_3$ のテンソル積は，順番通りに計算し，

$$(\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2)\otimes\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_3 \qquad \boldsymbol{e}_3\otimes(\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_3\otimes\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2$$

となり，$\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_3\neq\boldsymbol{e}_3\otimes\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2$ ですから，テンソル代数のテンソル積は交換不可能になります。

一方，この本で扱うテンソル積は，形式的に順序を変えずに計算すると，

$$(S^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)\otimes(T^k\boldsymbol{e}_k)=S^{ij}\,T^k\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k$$
$$(T^k\boldsymbol{e}_k)\otimes(S^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)=T^k\,S^{ij}\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$$

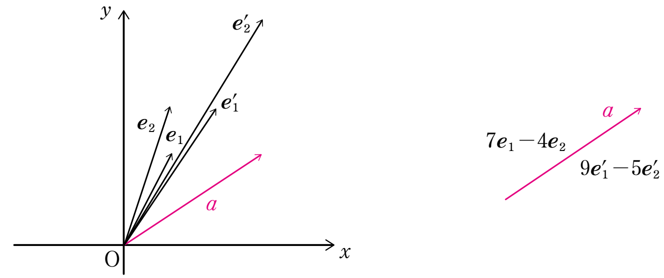
となりますが，上添え字に対応する基底をどこに書いてもよいことにしているので，第2式も，

$$T^k\,S^{ij}\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j \quad\to\quad S^{ij}\,T^k\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k$$

と表すことができます。$S^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ と $T^k\boldsymbol{e}_k$ のテンソル積は，$S^{ij}T^k$ に基底 $\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{e}_j$，$\boldsymbol{e}_k$ を $\otimes$ で結んだものを付けたものですから，$S^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ と $T^k\boldsymbol{e}_k$ の順序を入れ換えて表現しても同じテンソル積になります。

§2　基底の取り換えと成分の書き換え

線形空間の元は，基底の1次結合で表されました。基底のとり方はいくつもありますから，同じ元を表すのでも，基底が異なれば成分（1次結合の係数）が異なってきます。



例えば，$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ とすると，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ は R^2 の基底になっています。

$\boldsymbol{e}'_1=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}'_2=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ でも，$\boldsymbol{e}'_1$，$\boldsymbol{e}'_2$ は R^2 の基底です。

$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ を R^2 の基底としてとると，R^2 の元 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ は，

$$7\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2=7\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}$$

と $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ の1次結合で表され，$\boldsymbol{e}'_1$，$\boldsymbol{e}'_2$ を R^2 の基底とすると，

$$9\boldsymbol{e}'_1-5\boldsymbol{e}'_2=9\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}$$

と $\boldsymbol{e}'_1$，$\boldsymbol{e}'_2$ の1次結合で表されます。1次結合の係数を成分と呼ぶことにします。固定したベクトルを表すとき，基底を取り換えれば，成分を書き換えなければなりません。