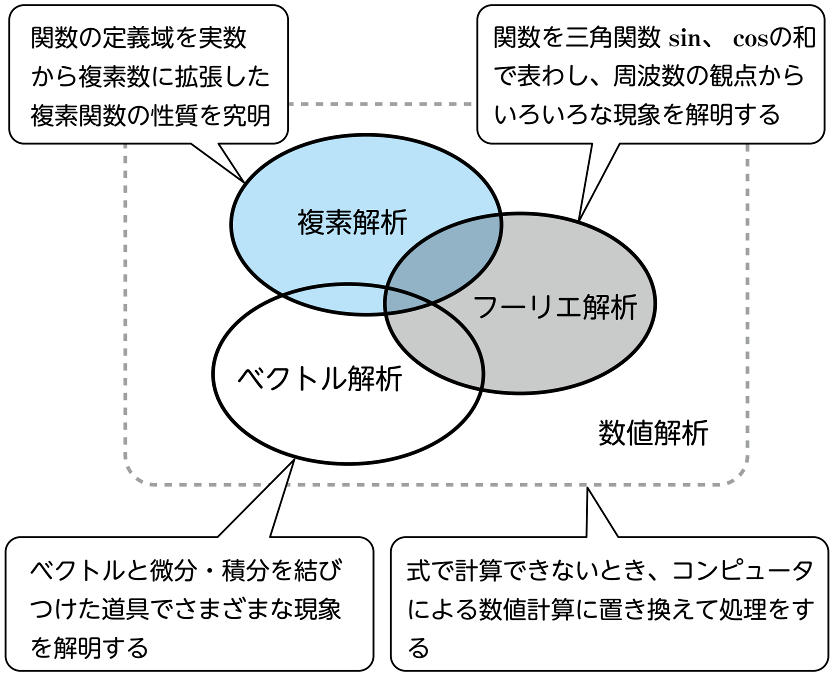
ーリエ解析の技法を用いることができる。つまり、複素解析が使われることになる。

### ●少しでも早めに学んでおいて損はない！

複素解析が使われている世界をいくつか紹介したが、理学や工学、社会科学などいろいろな分野で複素解析は道具として使われている。

したがって、人生の早い時期に複素解析の教養を深めておくことは、いろいろな可能性を広げることにもつながる。もちろん、高校生から始めても決して早すぎはしない。

まずは、本書で扱う基本だけでも教養として身につけておこう。また、ついでに「**ベクトル解析**」「**フーリエ解析**」……と解析学の輪を広げていくとおもしろい。

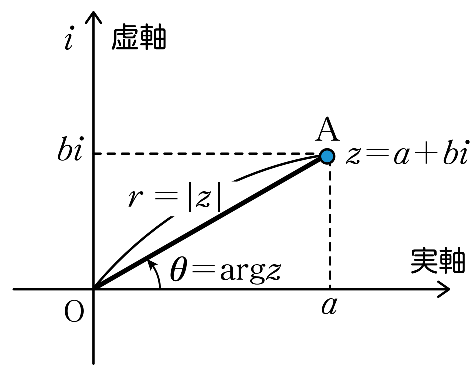





第1章

# 複素数と複素関数

複素数は高校の数学で初めて学んだ。その際、この数は現実には存在しない数であるかのように扱われた。しかし、この数によって数学をはじめ、いろいろな分野の理論がスッキリと美しくまとめ上げられるのである。複素数を抜きにして諸科学は語れないのだ。



# 1-1 複素数とは何か

**実数は、どんな数でも平方すると0以上の値となる。したがって、$x^2+1=0$　つまり $x^2=-1$　となる実数 $x$ は存在しない。ということは、実数の世界では、こんな単純な方程式 $x^2+1=0$　すら解くことができない。これに解をもたせるためには新たな数を用意する必要がある。**

## ●虚数単位

実数の世界では $x^2=-1$ となる実数 $x$ は存在しない。そこで、平方して $-1$ になる数を考えて、これを文字 $i$ で表わし **虚数単位**と呼ぶことにする。つまり、$i$ は $i^2=-1$ を満たす数である。

すると、$1=-i^2$ だから、正の数 $a$ に対して、$z^2+a=0$ は次のように変形できる。

$$z^2+a=z^2-ai^2=(z+\sqrt{a}\,i)(z-\sqrt{a}\,i)=0$$

ゆえに、2次方程式 $z^2+a=0$ の解は $\sqrt{a}\,i$ と $-\sqrt{a}\,i$ の2つ存在することになる。$x^2+a=0$ は $x^2=-a$ と書けるので、$\sqrt{a}\,i$ と $-\sqrt{a}\,i$ はともに $-a$ の平方根である。そこで、正の数 $a$ について

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$$

と定義する。とくに、$\sqrt{-1}=i$ となる。

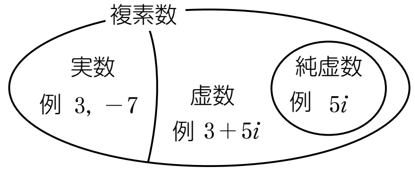
## ●複素数とは

$a+bi$ の形（$a, b$ は実数、$i$ は虚数単位）に表わされる数を**複素数**という。このとき、$a$ を **実部**、$b$ を**虚部**という。また、複素数 $z$ の実部を **Re（$z$）**、虚部を **Im（$z$）** などと書く。なお、複素数は虚部 $b$ が0であるかどうかで次のように分類される。





**複素数** $a+bi$（complex number）
- $b=0$ のとき　$a+bi$　は実数（real number）
- $b\neq 0$ のとき　$a+bi$　は虚数（imaginary number）




（注）$a=0$, $b\neq 0$ のときの複素数 $bi$ を**純虚数**という。なお、複素数は実部と虚部の複数からなる数だから複素数（complex number）という。

### Note 複素数とは何か

（1）2乗して $-1$ となる数を $i$ と表わし**虚数単位**という。

（注）$i$ は虚数（imaginary number）の頭文字。電磁気学では電流と区別するため $j$ を利用。

（2）$\sqrt{-1}=i$、$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$　$(a>0)$

（3）2つの実数 $a, b$ と虚数単位 $i$ を用いて $a+bi$ の形に表わされる数を**複素数**という。

### もう一歩進んで 四元数

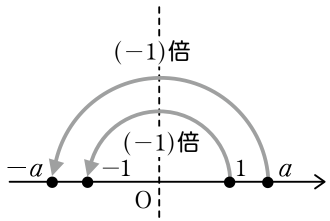
自然数からスタートして整数、有理数、実数、複素数と必要に応じて数を拡張してきたが、さらに**四元数**というものも考えられている。複素数は実部と虚部で構成されているので複素数と名付けられたが、別名、**二元数**とも呼ばれている。これに対して4つの要素から構成されている**四元数**もあり、ハミルトン（1806～1871）によって考え出されたもので、$a+bi+cj+dk$ などと表現される。

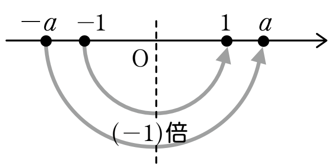
# 1-2 $i$ は虚しい数か

**虚数単位 $i$ は、2次方程式　$x^2+1=0$ の解として導入された。つまり、$i$ は $i^2=-1$ を満たす数であり、この $i$ を用いた $a+bi$ を 虚数（imaginary number）と名付けたのである（ただし、$a$、$b$（$\neq 0$）は実数）。このように説明されると、虚数はその名の通り、「現実には存在しない数」のように思われてくる。これでは $i$ が少しかわいそうである。そこで、ここでは虚数単位 $i$ を「回転」という観点から見てみることにしよう。**

## ● −1 は 180° 回転を表わす数である

実数の世界で考えると、「−1」という数には特別な意味がある。そのことを数直線で見てみることにしよう。

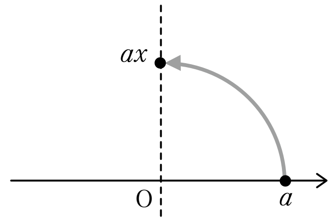



例えば、1 という実数に −1 を掛けると −1 となる。このことは、1 は −1 を掛けることによって、**原点 O に関して対称な位置にある −1 に移された**、と考えられる。また、$a$ という実数に −1 を掛けると $-a$ になり、$a$ は原点 O に関して対称な位置にある $-a$ に移されたと考えられる。これらはいずれも **180° の回転移動**である。−1 や $-a$ に「−1」を掛けた場合も同様である。

## ● 90° 回転を表わす数は何か

原点を中心に 180° 回転を表わす数が −1 であれば、90° 回転を表わす数があってもおかしくない。そこで、この数を $x$ としてみると、数直線上の数 $a$ を原点 O を中心に 90° 回転した数は $ax$ と書けることになる。ただし、この $ax$ は、当然、数直線上におさまらない。

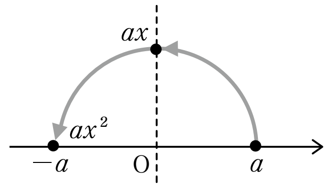



そこで右図のように平面の世界で考えることになる。

ここで、数直線上の数 $a$ を原点 O を中心に 90° 回転した数 $ax$ を、さらに、90° 回転させた数は $(ax)x=ax^2$ となる。これは、数 $a$ を原点 O を中心に 180° 回転した数 $-a$ に等しくなる。

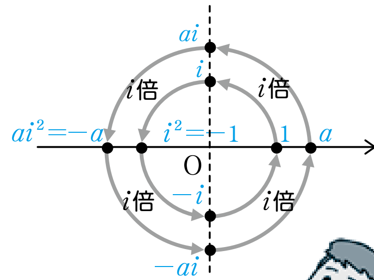
よって、$ax^2=-a$

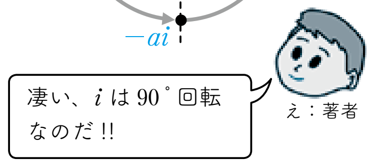
ゆえに、$x^2=-1$　……①




つまり、原点を中心に 90° 回転を表わす数 $x$ は①を満たすことがわかる。

そこで、①を満たす $x$ を記号 $i$ で表わし、これを「**虚数単位**」と呼ぶことにする。つまり、$i$ は $i^2=-1$ を満たす数である。すると、数直線上の数 $a$ を原点 O を中心に 90° 回転した数は $ai$ と書ける。また、数直線上の数 $-a$ を原点 O を中心に 90° 回転した数は $-ai$ と書ける。




### Note　$i$ は虚しい数か

回転という考え方をすると、虚数単位 $i$ はにわかに実感を帯びてくる。つまり、ある数に $i$ を掛けると、その数は原点を中心に 90° 回転した数になるのである。