序

青葉（あおば）は、数学が苦手だ。
むしろ嫌い、といったほうが正確かもしれない。
某大学の文学部に入学した当初、彼女は心理学を専攻するつもりでいた。しかし抽選によって決定した彼女の専攻は「数理行動科学」という、聞き慣れないものだった。
（心理学に人気があるのは知ってたけど、よりによって、自分と相性が一番悪そうな研究室か……）
自分の運のなさを彼女は悲嘆した。

花京院（かきょういん）は、数学が好きだ。
だから数学そのものを研究するために、某大学の数学科に進学した。しかしだんだんと彼は、世界を表現する言語としての数学に興味をもつようになった。そんなころ、ふとしたきっかけで、同大学内の文学部に「数理行動科学専攻」なる研究室が存在することを彼は知った。
（人間の行動や社会を数学で表現できたら、おもしろそうだ……）
その後、彼が転専攻を決めた大きな理由の一つは、文学部では卒業論文のテーマを自分で自由に選ぶことができる、ということだった。

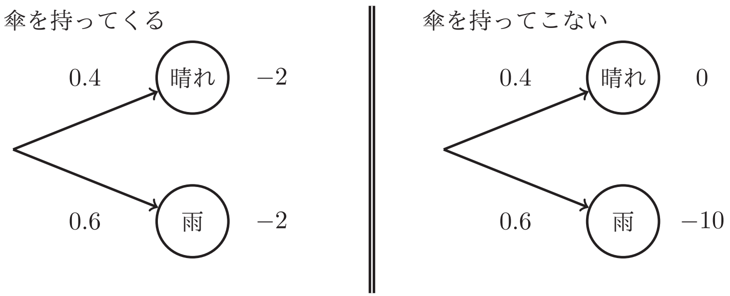
「数学は人生に不要だ」と考える青葉。
「数学は人生に役立つ」と信じる花京院。

まったく接点がなかったはずの 2 人が文学部で出会うのは、それからほどなくしてのことだった。

モデルとはなにか

研究室には青葉と花京院の 2 人しかいなかった。
それぞれに無言で作業を続けている。
花京院は作業机の隅に腰掛け、イヤホンをつけて本を読んでいた。広い机の上には、論文のコピーと計算用紙が散乱していた。
青葉はリポートを書くために、パソコンのモニタに向かっている。
「ねえ花京院くん、基礎演習の課題って、もう終わった？」作業が一段落した青葉は、花京院に声をかけた。
「終わったよ」開いた頁に視線を向けたまま花京院がこたえる。
「この課題、難しくない？《身近な現象を取り上げ、モデルで説明を試みよ》って言われても、困るんだよなー。そもそも《モデル》ってなんなの？」青葉が背伸びをしながら、ふうっと息をはいた。
「モデルとは、世界の一部を抽象化して、その本質を概念によって定式化したものだよ」
「ちょっとなに言ってるかわからない」
「今日、学校に来るとき傘持ってきた？」イヤホンを外しながら花京院が聞いた。
「降りそうだから持ってきたよ。どうして？」
「《傘を持ってきた》という君の行動を《モデル》で説明しよう」
「そんなことできるの？」
「うまくいくかどうかは試してみないとわからない。はじめに、雨に濡れることがどのくらい嫌なのかを数値で表せるとしよう。たとえば、その数値が -10 だと仮定する。この -10 を基準にすると、傘を持ってくるコストはどのくらいだと思う？」
「えーっと、雨に濡れることが -10 でしょ。ってことは、傘を持ってくる手間はその $1/5$ くらいかな。わかんないけど」
「ということは、-10 の $1/5$ だから -2 だね。次に、晴れる確率と雨が降る確率をそれぞれ仮定しよう。天気は《雨》か《晴れ》のみと仮定する」花京院はスマートフォンで天気予報を調べた。
「今日の雨の確率は 0.6 だ。この情報にもとづき、晴れの確率は $1-0.6=0.4$ と定義しよう。以上の仮定をまとめるとこうなる」

花京院はホワイトボードに図を描いた。



確率的に生じるできごとを、このような図で表したものを《樹形図》という。モデルの仮定をまとめると、こうだ。

1. 行動の選択肢は《傘を持ってくる》か《持ってこない》の 2 つ。天気は《雨》か《晴れ》の 2 つ
2. 雨に濡れると -10（濡れない場合は 0）。傘を持ってくるコストは -2
3. 雨の確率は 0.6、晴れの確率は 0.4

「ちょっと待って。傘を持ってきたら濡れないんでしょ？ 傘を持ってきたときに雨が降ると、結果が -2 なのは、どうして？」
「雨でも晴れでも、結果的に濡れなければ損失は 0 と仮定している。そこから傘を持つことのコストを引いたんだよ」
「あ、そういうことか」青葉は樹形図の数値を確認した。
「もちろん仮定だから、別の数値を考えてもいい。その場合は仮定に合わせて結論が変わるだけ。次に、傘を持ってきた場合の平均的な損失を考えよう。《確率》と《その確率で実現する値》の積の合計を平均的な損失と定義する。

$$(0.4 \times -2) + (0.6 \times -2) = -0.8 - 1.2 = -2.$$

この値は一般に期待値と呼ばれている。よく出てくる用語だから覚えておくといいよ。直感的に言えば、同じことを何度も繰り返したときの平均的な値のことだ。さて、傘を持ってこなかった場合の平均の損失は、

$$(0.4 \times 0) + (0.6 \times -10) = 0 - 6 = -6.$$

よって、それぞれの期待値を比較すると、

$$\text{持ってきた場合の期待値} > \text{持ってこなかった場合の期待値}$$
$$-2 > -6$$

が成立するので、傘を持ってきたほうがよい。君は平均的な損失を減らすよう合理的に選択した結果、傘を持って大学に来た」
「それがモデル？」
「そうだよ。原始的（プリミティブ）だけど、一応モデルの基本的な性質を備えている。この単純な意思決定のモデルは、いくつかの明示的な仮定からなる。そして君の行動、つまり観察されたデータを、合理的選択という原理から説明している。さらに、簡単な計算からインプリケーションを導出できる」
「インプリケーション？」
「モデルから導かれる命題のことだよ。さっきの仮定から、雨の確率が何 % 以上なら、君が傘を持ってくるかわかる？」
「えーと、雨が降る確率が 60% だったから、60% 以上？」
「ちょっと違う」
花京院は式を書いて説明を続けた。

雨の確率を p, 晴れの確率を $1-p$ とおく。すると、傘を持って出た場合の平均の損失は、

$$((1-p) \times -2) + (p \times -2) = (-2 + 2p) + (-2p) = -2.$$

一方、傘を持ってこなかった場合の平均の損失は、

$$((1-p) \times 0) + (p \times -10) = (0) + (-10p) = -10p.$$

よって、傘を持ってきた場合の期待値のほうが大きいと仮定すれば、

$$\text{傘を持ってきた場合の期待値} > \text{持ってこない場合の期待値}$$
$$-2 > -10p$$