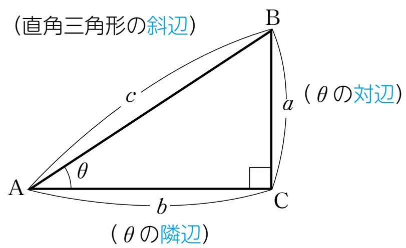
3-1 正弦波（cos、sin）がフーリエ解析の基本

正弦波（cos、sin）はフーリエ解析の中心となる関数である。そこで、まず、cosとsinの定義と性質を確認しておこう。

三角関数cosθ、sinθで表される波を**正弦波**（サインカーブ）といった。この**正弦波の重ね合わせで関数の性質を解明するのがフーリエ解析**である。そこで、ここでは、高校で学んだ三角関数cosθ、sinθの復習をしておこう。まずは、「三角関数の定義」の復習から始めよう。

●まずは直角三角形の辺の長さの比でcosθ、sinθを定義

右図は、直角三角形の直角ではない一つの角の大きさθに対して、辺の名前と辺の長さを表したものである。直角三角形の「斜辺」は一番長い辺のことだが、対辺、隣辺は着目した角によって変化する。図はあくまでもθを基準とした場合である。



このとき、θに対して辺の長さの比を対応させる次の関数cos(θ)、sin(θ)を考える。

$$\cos(\theta)=\frac{\text{隣辺の長さ}}{\text{斜辺の長さ}}、\ \sin(\theta)=\frac{\text{対辺の長さ}}{\text{斜辺の長さ}}$$

つまり、$\cos(\theta)=\dfrac{b}{c}$ 、$\sin(\theta)=\dfrac{a}{c}$

ここで、( )は関数記号f( )の（　）だが、煩わしいので省略して次のように書くことにする。

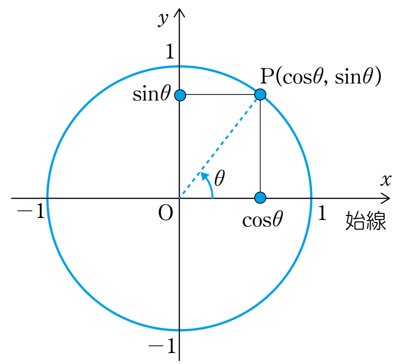
$$\cos\theta=\frac{b}{c}、\ \sin\theta=\frac{a}{c}$$

（注）cosθ、sinθは角の大きさθに三角形の辺の長さの比の値を対応させるので**三角比**と呼ばれている。

● 単位円で定義

直角三角形を用いて定義されたcosθ、sinθでは、$0°<\theta<90°$という制約が生じる。しかし、角度は一般に、この範囲に収まるものではない。鈍角三角形では一つの角が90°を越えている。また、回転運動などを考えると、θが360°より大きな角や負の角（逆回り）もある。したがって、このような角に対してもcosθ、sinθを使えるようにしなければ利用範囲が狭まってしまう。

そこで、最終的には**直角三角形を離れて、座標平面と単位円（原点中心で半径1の円）を利用して cosθ 、sinθ を定義する**ことになる。



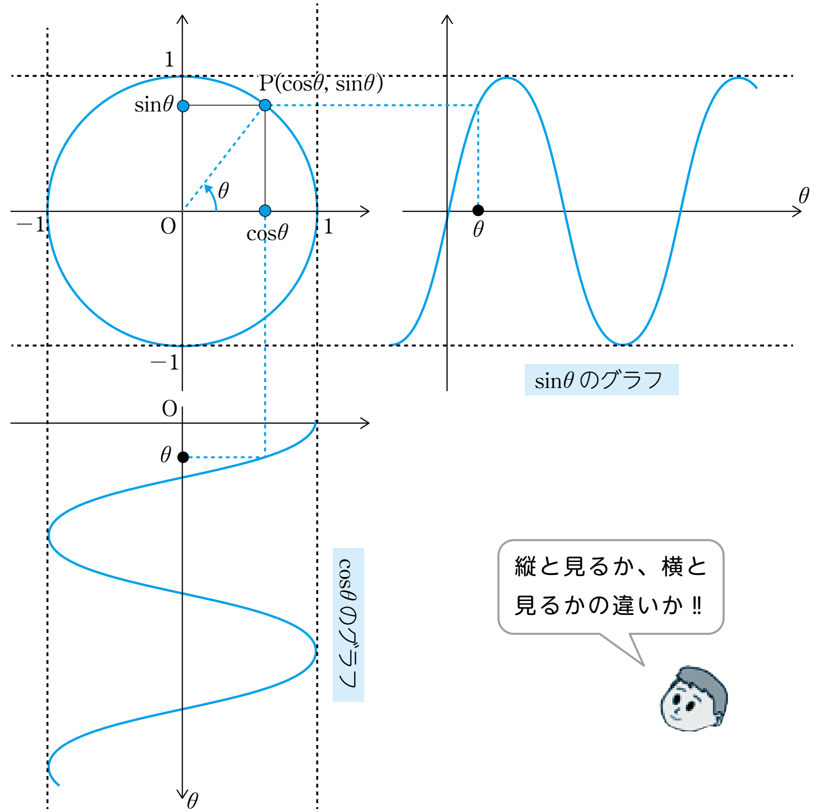
上図のように、θが与えられたら、まず、単位円周上の(1, 0)を起点とした点Pが原点中心にθだけ回転すれば、動く半径（動径）の位置OPが決まる。ここで、θが正ならば単位円周上を原点中心に左回り（正の向き）に回転し、θが負ならば右回り（負の向き）に回転することにする。

そこで、このとき、**点 P の x 座標を $\cos\theta$ の値、y 座標を $\sin\theta$ の値と定義する**。これで θ がどんな角でも $\cos\theta$、$\sin\theta$ の値が決まる。この $\cos\theta$、$\sin\theta$ を**三角関数**と呼ぶことにする。

（注）θ が鋭角の場合には $\cos\theta$、$\sin\theta$ は直角三角形を用いて定義したのだが、単位円による定義は、これも含んでいる。

● 三角関数のグラフ

回転角 θ を横軸に、関数値を縦軸にとると、$\cos\theta$、$\sin\theta$ のグラフは各々次のようになる。



● $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

θ がどんな角でも $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ が成立する。この関係は直角三角形で定義された場合はピタゴラスの定理から導かれる。また、単位円で定義された場合は、単位円の方程式が $x^2+y^2=1$（これも、結局はピタゴラスの定理による）から導かれる。

（注）$\sin^2\theta$ は $(\sin\theta)^2$ の意味である。他も同様。

使ってみよう

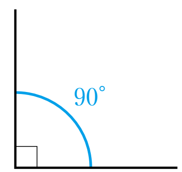
$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき $\cos\theta$ の値を求めてみよう。

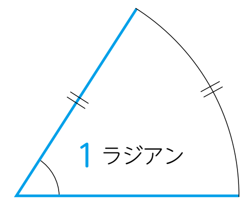
$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

ゆえに、$\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

● 弧度法を使う

小・中学校では、角度を測るのに**度数法**を使っていた。これは、1 回転を 360°、直角を 90° とする測り方である。高校の数学からは**弧度法**（こどほう）が主に使われるようになる。微分・積分の表現が簡単になるからである。弧度法は扇形の弧の長さが半径に等しいときの中心角を 1 弧度（ラジアン）とする測り方である。弧度法の場合、単位（ラジアン）は、通常、省略される。なお、度数法と弧度法の換算式は次の式を使うと便利である。





$180°=\pi$ ラジアン（π は円周率で 3.14159……）

（例） $60°=\pi/3$ ラジアン、$30°=\pi/6$ ラジアン

$45°=\pi/4$ ラジアン、$360°=2\pi$ ラジアン

5-1 フーリエ級数ってどんなもの？

有限区間で定義された関数 $f(t)$や、周期関数 $f(t)$を正弦波（cos、sin）の和で表す公式がある。まずは有限区間の場合を紹介しよう。

なんだか難しそうに思えるが、高校で学ぶ基本的な三角関数と初歩的な積分しか使っていない。

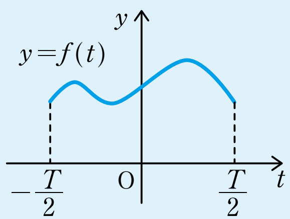
関数$f(t)$は区間$-\frac{T}{2} \leqq t \leqq \frac{T}{2}$で定義されているとする。このとき、$f(t)$は次のように級数展開できる。

$$f(t) = a_0 + \left(a_1\cos\frac{2\pi t}{T} + b_1\sin\frac{2\pi t}{T}\right) + \left(a_2\cos\frac{4\pi t}{T} + b_2\sin\frac{4\pi t}{T}\right)$$
$$+ \left(a_3\cos\frac{6\pi t}{T} + b_3\sin\frac{6\pi t}{T}\right) + \cdots$$
$$+ \left(a_n\cos\frac{2n\pi t}{T} + b_n\sin\frac{2n\pi t}{T}\right) + \cdots \quad \cdots\cdots①$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt \quad \cdots\cdots②$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}dt \quad \cdots\cdots③$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}dt \quad \cdots\cdots④$$



ただし、nは自然数とする。

上記の①式を**フーリエ級数**といい、

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_n,\ \cdots$$

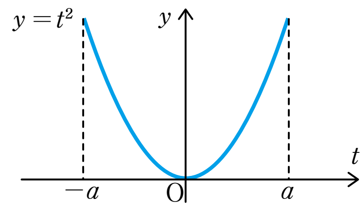
を**フーリエ係数**、関数$f(t)$を①のように表すことを関数$f(t)$の**フーリエ級数展開**という。

（注）**無限の和を「級数」という**。なお、関数$f(t)$によっては有限の和になることがある。たとえば、高校数学で学んだ半角の公式 $\sin^2\frac{t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t$ はフーリエ級数展開であるが有限の和である。

しかし、それにしてもこのフーリエ級数の公式はわかりにくい。そこで、$f(t)$の具体例をもとに、まずは、フーリエ級数展開の公式①、②、③、④を使ってみることにしよう。

〔例〕 $f(t) = t^2\ (-a \leqq t \leqq a)$をフーリエ級数展開した式を前ページの公式①②③④を利用して求めてみよう。

まずは、フーリエ係数を②③④の$f(t)$にt^2を、$\frac{T}{2}$にaを、つまり、Tに$2a$を代入して計算してみると次のようになる。



②より　$a_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} t^2 dt = \frac{a^2}{3}$　$\cdots\cdots$ ⑤

③より　$a_n = \frac{2}{2a}\int_{-a}^{a} t^2\cos\frac{2n\pi t}{2a}dt = \frac{4(-1)^n a^2}{n^2\pi^2}$　$\cdots\cdots$⑥

④より　$b_n = \frac{2}{2a}\int_{-a}^{a} t^2\sin\frac{2n\pi t}{2a}dt = 0$　$\cdots\cdots$⑦　　（奇関数の積分）

（注）この計算は少し複雑なので、その詳細は次ページの＜計算 Note＞に掲載した。ただし、複雑なだけで高校の範囲内である。

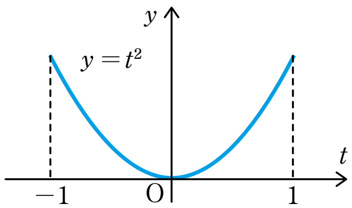
⑤⑥⑦と①より　$f(t) = t^2\ \ (-a \leqq t \leqq a)$は次のように書ける。

$$t^2=\frac{a^2}{3}+\left(-4\frac{a^2}{1^2\times\pi^2}\cos\frac{2\pi t}{2a}+0\sin\frac{2\pi t}{2a}\right)+\left(4\frac{a^2}{2^2\pi^2}\cos\frac{4\pi t}{2a}+0\sin\frac{4\pi t}{2a}\right)$$

$$+\left(-4\frac{a^2}{3^2\pi^2}\cos\frac{6\pi t}{2a}+0\sin\frac{6\pi t}{2a}\right)+\cdots$$

$$+\left(4\frac{(-1)^n a^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi t}{2a}+0\sin\frac{2n\pi t}{2a}\right)+\cdots$$

$$=\frac{a^2}{3}+4\frac{a^2}{\pi^2}\left(-\cos\frac{\pi t}{a}+\frac{\cos\frac{2\pi t}{a}}{2^2}-\frac{\cos\frac{3\pi t}{a}}{3^2}+\cdots+\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi t}{a}}{n^2}+\cdots\right)\quad\cdots\cdots⑧$$



しかし、⑧式を見ただけではフーリエ級数展開が正しいかどうかよくわからない。そこで、$a=1$ として、⑧式の最初の 100 項までのグラフを $1\leqq t\leqq 1$ の範囲で青で描いたみた（右図）。前ページに黒で描いておいた $f(t)=t^2$ のグラフとほぼ重なることがわかる。

計算Note ⑤⑥⑦の積分計算の詳細

(1) ②より $a_0=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}t^2\,dt=\frac{1}{2a}\times2\times\int_0^a t^2\,dt=\frac{1}{a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^a=\frac{a^2}{3}$ ……⑤

t^2 が偶関数であることを考慮

(2) ③より a_n を求めるのだが計算が少し複雑なので 3 段階に分ける。

$$a_n=\frac{2}{2a}\int_{-a}^{a}t^2\cos\frac{2n\pi t}{2a}dt=\frac{1}{a}\times2\times\int_0^a t^2\cos\frac{n\pi t}{a}dt$$

$t^2\cos\frac{n\pi t}{a}$ が偶関数であることを考慮

$$=\frac{2}{a}\int_0^a t^2\cos\frac{n\pi t}{a}dt$$

ここで、$\int_0^a t^2\cos\frac{n\pi t}{a}dt$ を部分積分法を使って計算すると

$$\int_0^a t^2\cos\frac{n\pi t}{a}dt=\left[t^2\frac{a\sin\frac{n\pi t}{a}}{n\pi}\right]_0^a-\int_0^a 2t\frac{a\sin\frac{n\pi t}{a}}{n\pi}dt$$

部分積分法 $\int_p^q u'v=[uv]_p^q-\int_p^q uv'$ を利用

$$=-\frac{2a}{n\pi}\int_0^a t\sin\frac{n\pi t}{a}dt$$

ここで、$\int_0^a t\sin\frac{n\pi t}{a}dt$ を上記のように部分積分法を使って計算すると

$$\int_0^a t\sin\frac{n\pi t}{a}dt=\left[t\frac{-a\cos\frac{n\pi t}{a}}{n\pi}\right]_0^a-\int_0^a\frac{-a\cos\frac{n\pi t}{a}}{n\pi}dt$$

$$=\frac{-a^2(-1)^n}{n\pi}+\frac{a}{n\pi}\left[\frac{a\sin\frac{n\pi t}{a}}{n\pi}\right]_0^a$$

$$=\frac{-(-1)^n a^2}{n\pi}$$

ゆえに、

$$a_n=\frac{2}{a}\int_0^a t^2\cos\frac{n\pi t}{a}dt=\frac{2}{a}\left(-\frac{2a}{n\pi}\right)\frac{-a^2(-1)^n}{n\pi}$$

$$=\frac{4(-1)^n a^2}{n^2\pi^2}\quad\cdots\cdots⑥$$

(3) ④より、$t^2\sin\frac{n\pi t}{a}$ が奇関数であることを考慮して

$$b_n=\frac{2}{2a}\int_{-a}^{a}t^2\sin\frac{2n\pi t}{2a}dt=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}t^2\sin\frac{n\pi t}{a}dt=0\quad\cdots\cdots⑦$$

以上、(1)(2)(3) の積分計算をすることによりフーリエ係数⑤⑥⑦を求めることができる。しかし、一般に積分計算は大変である。また、困難なときもある。このようなときにはコンピュータを使った「**数値積分**」を利用することになる。