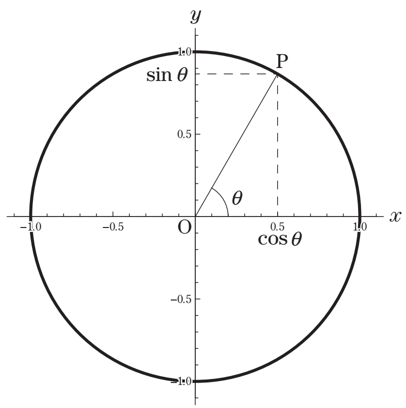
2-1 三角形から円運動へ

三角形の角度は 0° から 180° までである。この範囲だけのサインやコサインでは不便になることが多い。サインとコサインは物理や化学の分野で、ときには経済学でもよく使われる。サインやコサインを音や電気信号などいろいろな周期変動する波などの現象に応用するためには、角度を 180° を超えて定義しておく必要がある。

そのためには、鈍角のコサインを考えたときに座標を考えたのと同様、半径が 1 の円（**単位円**という）上の点の動きを調べると便利である。

点 P が、単位円の上を動いていくとき、動いていく半径 OP を**動径**という。単位円上の点の位置は、角度を決めると定まる。このとき、角度 θ のときの単位円上の点の y 座標を $\sin\theta$, x 座標を $\cos\theta$ と定めるのである。

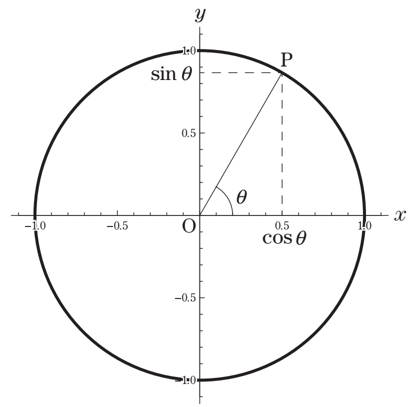


$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

こうすれば、第 1 章で扱ったような直角三角形の場合のサインとコサインの定義に合致している。これで、角度が 180° を超えても定義できることになる。角度がマイナスでも定義できる。

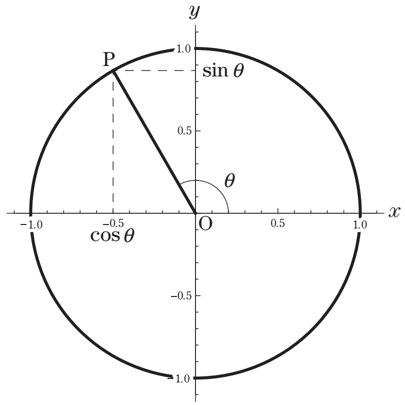
図で表してみると、点 P が第 1 象限にあるときは、$y = \sin\theta$ も $x = \cos\theta$ も正の値である。

$$y = \sin\theta > 0 \qquad x = \cos\theta > 0$$



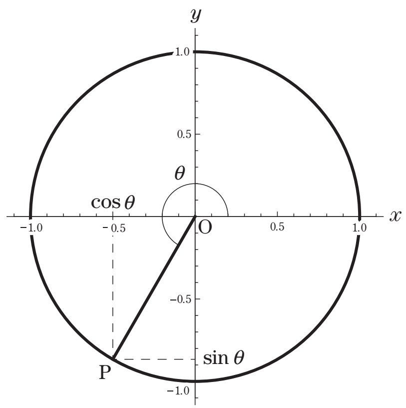
点 P が第 2 象限にあるときは、$y = \sin\theta$ は正の値であり、$x = \cos\theta$ は負の値である。

$$y = \sin\theta > 0 \qquad x = \cos\theta < 0$$



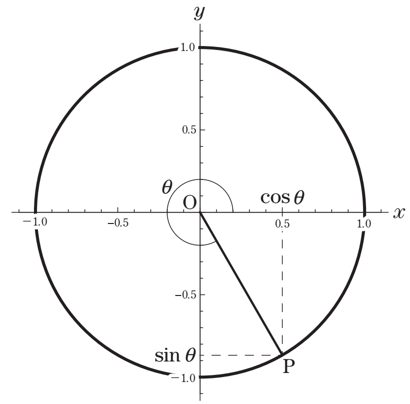
点 P が第 3 象限にあるときは、$y = \sin\theta$ は負の値であり、$x = \cos\theta$ も負の値である。

$$y = \sin\theta < 0 \qquad x = \cos\theta < 0$$



点 P が第 4 象限にあるときは、$y = \sin\theta$ は負の値であり、$x = \cos\theta$ は正の値である。

$$y = \sin\theta < 0 \qquad x = \cos\theta > 0$$



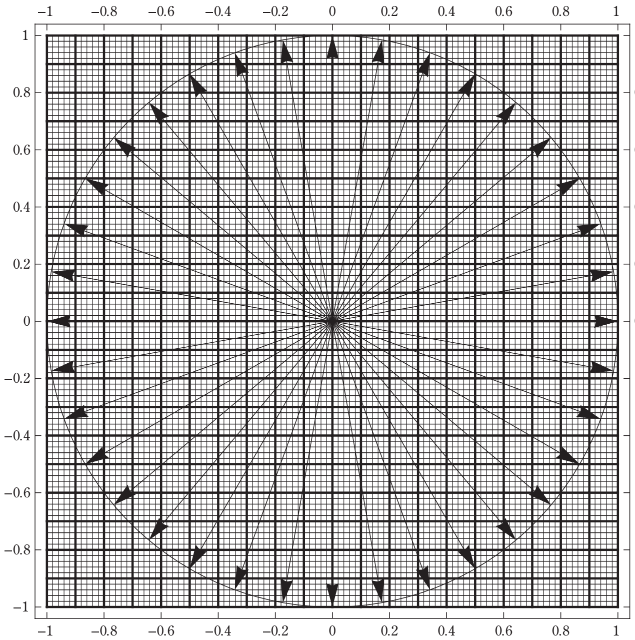
一般角

円運動とサイン、コサインを考えていくと、動径と x 軸の正の方向とのなす角は 360° より大きくてもよいし、マイナスでもよいことになってくる。

このように考えた角度を**一般角**という。そして、1 回転以上して動径が同じ位置に来たら、x 座標と y 座標は同じ値になる。このことを式で表すと次のようになる。$t^\circ = s$ ラジアン、n は整数とする。

$$\theta = t^\circ + 360^\circ \times n = s + 2\pi \times n$$
$$\sin(t^\circ + 360^\circ \times n) = \sin t^\circ$$
$$\cos(t^\circ + 360^\circ \times n) = \cos t^\circ$$
$$\sin(s + 2\pi \times n) = \sin s$$
$$\cos(s + 2\pi \times n) = \cos s$$

一般角のサインとコサインの値は、次の図から読み取れる。



角度が 180°から 270°の間にあるときは、次のようになる。

$t°$	180°	190°	200°	210°	220°	230°	240°	250°	260°	270°
sin $t°$	0	-0.17	-0.34	-0.5	-0.64	-0.77	-0.87	-0.94	-0.98	-1
cos $t°$	-1	-0.98	-0.94	-0.87	-0.77	-0.64	-0.5	-0.34	-0.17	0

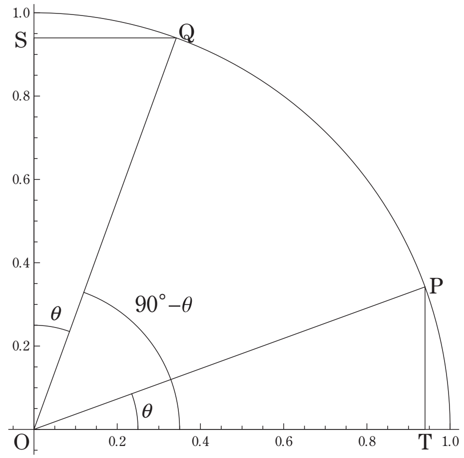
角度が 270°から 360°の間にあるときは、次のようになる。

$t°$	270°	280°	290°	300°	310°	320°	330°	340°	350°	360°
sin $t°$	-1	-0.98	-0.94	-0.87	-0.77	-0.64	-0.5	-0.34	-0.17	0
cos $t°$	0	0.17	0.34	0.5	0.64	0.77	0.87	0.94	0.98	1

また、$\sin(-\theta) = -\sin\theta$、$\cos(-\theta) = \cos\theta$ もわかるだろう。

sin θ と cos θ との関係

サインとコサインの値の変化を見ていると、両者の間には一定の関係があることに気がつくだろう。例えば、$\sin 75° = 0.966 = \cos 15°$ となっている。一般に、$\sin\theta = \cos(90° - \theta)$ となっているのだろうか？　これが一般に成り立つことは、次の図を見れば理解できるだろう。



この図は次のように描かれている。直角三角形 POT と合同な三角形 QOS を描く。OS = OT、∠QOS = ∠POT、QO = PO = 1 などとなっている。また、Q が x 軸の正の方向となす角度は、$90° - \theta$ である。

Q の高さつまり Q の y 座標は、OS と等しいので、$\sin(90° - \theta) = \mathrm{OS} = \mathrm{OT} = \cos\theta$ となる。

同様に、Q の x 座標は QS と等しいので、$\cos(90° - \theta) = \mathrm{QS} = \mathrm{PT} = \sin\theta$ となる。

以上をまとめると次のようになる。

$$\begin{cases} \sin(90° - \theta) = \cos\theta & \text{弧度法で表すと } \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \\ \cos(90° - \theta) = \sin\theta & \text{弧度法で表すと } \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \end{cases} \tag{2.1}$$

$t°$(弧度法で s)に対して、$90° - t°$(弧度法で$\frac{\pi}{2} - s$)を、「$t°(s)$の**余角**」というが、この用語を使うと次のようにも表せる。

$$\sin(t° \text{の余角}) = \cos t°$$
$$\cos(t° \text{の余角}) = \sin t°$$

$$\sin(s \text{ の余角}) = \cos s$$
$$\cos(s \text{ の余角}) = \sin s$$

実は、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の間には、もう一つ重要な関係が成り立っている。それは、

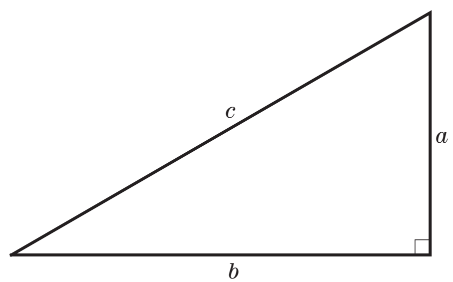
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

である。

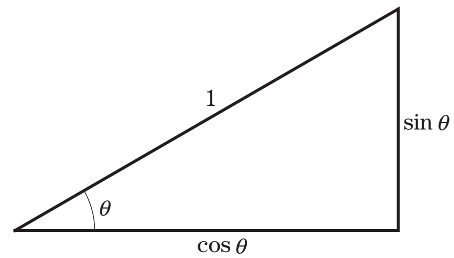
この関係式が成り立つことは、直角三角形に関する三平方の定理から容易に導ける。三平方の定理とは、直角三角形の 3 つの辺の長さを a、b、c(斜辺)とすると、

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立つことである。



$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は、直角三角形において、斜辺が 1(半径が 1 の円周上)のときの高さ(y 座標)と底辺の長さ(x 座標)であったから、一般の三平方の定理において、$a = \sin\theta$、$b = \cos\theta$、$c = 1$ とすればよい。



$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

ここで、三角関数の 2 乗や 3 乗は、$(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$、$(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$ や、$(\sin\theta)^3 = \sin^3\theta$、$(\cos\theta)^3 = \cos^3\theta$ と表すのが普通であることに注意しておこう。$\sin^2\theta$ を $(\sin\theta)^2$ と表しても間違いではないし、まったく問題がないことも覚えておこう。好きなほうを使ってよい。

$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の関係を次のように変形すると、$\sin\theta$ は $\cos\theta$ で表せ、$\cos\theta$ は $\sin\theta$ で表せるので、一方の値がわかれば他方の値も求められる。

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \qquad \sin\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$
$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \qquad \cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta}$$

±は、一般には両方ありうるが、θ が第何象限の角度かが決まればどちらかに定まる。

例えば、θ が第 3 象限の角度で、$\cos = -0.3$ のときは、$y = \sin\theta < 0$ なので、$\sin\theta$ は次のように求められる。

$$\sin\theta = -\sqrt{1-(-0.3)^2} = -\frac{\sqrt{91}}{10} \fallingdotseq -0.953939$$

θ が第 2 象限の角度で、$\sin\theta = 0.7$ のときは $x = \cos\theta < 0$ なので、$\cos\theta$ の値は次のように求められる。

$$\cos\theta = -\sqrt{1-0.7^2} = -\frac{\sqrt{51}}{10} \fallingdotseq -0.714143$$

上の計算では、小数の値はいずれも小数第 7 位を四捨五入してある。

例題 2-1

次の値を求めよ。

$$\sin 120^\circ = \sin\frac{2\pi}{3}$$

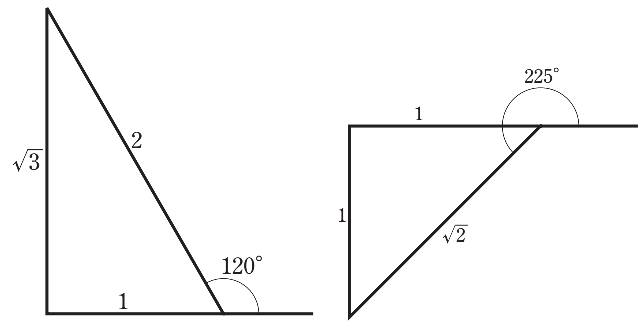
$$\cos 120^\circ = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\sin 225^\circ = \sin\frac{5\pi}{4}$$

解答

$\sin 120^\circ = \sin\dfrac{2\pi}{3}$ は、$\dfrac{2\pi}{3}$ は第 2 象限の角度なので、$\sin 120^\circ > 0$、$\cos 120^\circ < 0$ となる。

このことに注意すれば、あとは図から求められる。



$$\sin 120^\circ = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

演習問題 2-1

次の値を求めよ。

$$\sin 225^\circ = \sin\frac{5\pi}{4}$$

$$\cos 225^\circ = \cos\frac{5\pi}{4}$$

$$\sin 330^\circ = \sin\frac{11\pi}{6}$$

$$\cos 330^\circ = \cos\frac{11\pi}{6}$$

（答えは 241 ページ）

例題 2-2

$\sin 48^\circ = 0.743145$ を使って、$\cos 42^\circ$ と $\cos 48^\circ$ の値を求めよ。

解答

$\cos 42^\circ > 0$ であり、$\cos 48^\circ > 0$ であるから、$\cos 42^\circ$

$= \cos(90^\circ - 48^\circ) = \sin 48^\circ = 0.743145$

$$\cos 48^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 48^\circ} = \sqrt{0.447736} \fallingdotseq 0.669131$$

演習問題 2-2

$\cos 13^\circ = 0.97437$ を使って、$\sin 77^\circ$ と $\sin 13^\circ$ の値を求めよ。

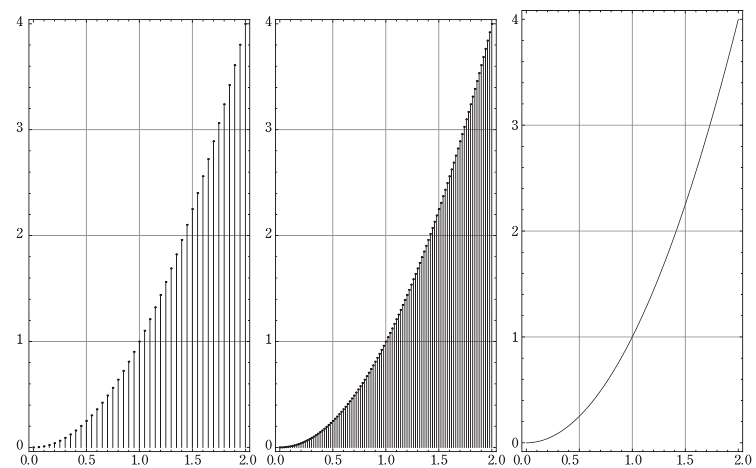
（答えは 242 ページ）

2-2 三角関数のグラフ

$y = x^2$ という関数については、そのグラフが放物線であり、このことが、面積の問題や、落体の運動など力学の問題、その他、物理や化学の問題を考えるのに役に立った。同じように、今度は、サインやコサインの関数のグラフを調べてみよう。はじめに、関数のグラフはどのようにつくられるか、関数 $y = f(x) = x^2$ で思い出しておこう。

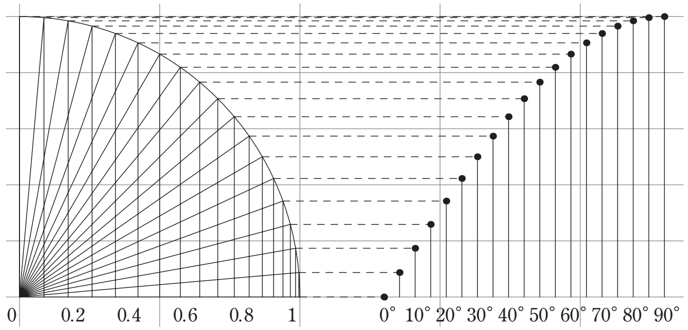
動く x の値を、x 軸上にとる。$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲のグラフを描いてみよう。x 軸上の点 $(x,\ 0)$ において、高さが $y = x^2$ の棒を立てる。このような棒を、$x = 0$ から $x = 2$ まで、x の値を 0.05 刻みにとったのが次の図（左）である。ここで刻み幅をどんどん小さくしていくと、棒の間隔が小さくなり密集してくる。刻み幅を 0.02 にした場合が中央の図である。

ここで、棒の先端の点を結ぶと、次第に滑らかな曲線になっていく。この曲線が関数 $y = x^2$ のグラフ（右側の図）であった。

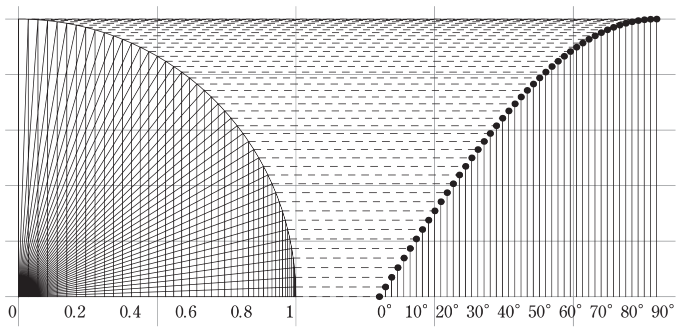


$y = \sin t$ のグラフ

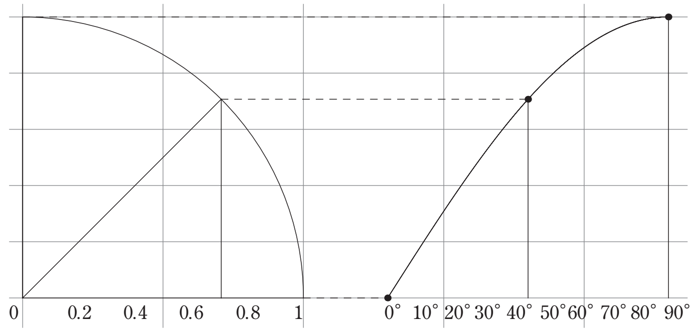
関数＝ $\sin t$ のグラフを描くときも同じ作業をすればよい。各 t の値に対して、$y = \sin t$ は、単位円における動径の高さであった。この同じ高さを角 t の値のところに棒を立てればよい。$0^\circ \leqq t \leqq 90^\circ$ の範囲でこの作業を行なうと、次の図のようになる。5° 刻みに点をとると次のようなグラフになる。



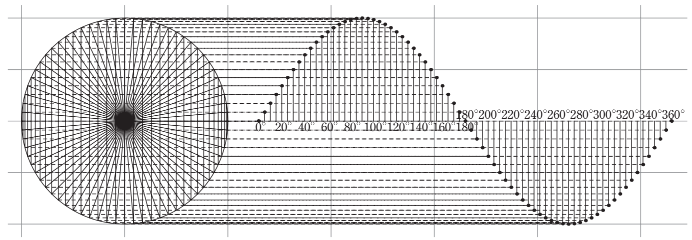
2° 刻みに点をとると次のようなグラフになる。

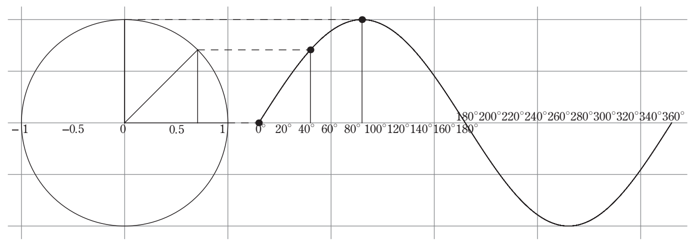


棒の先端を結んで滑らかな曲線にすると次のようになる。



さらに 90° までではなく、1 回転して 360° まで動かしてみると次のようなグラフになる。





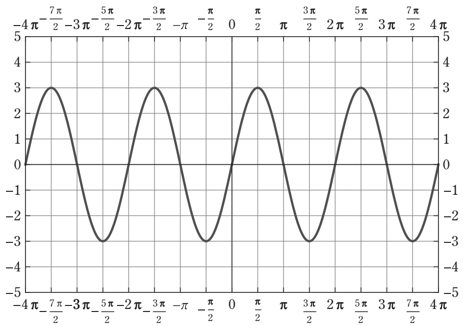
例題 2-3

（1） 関数 $y = 3\sin t$ のグラフを描け。

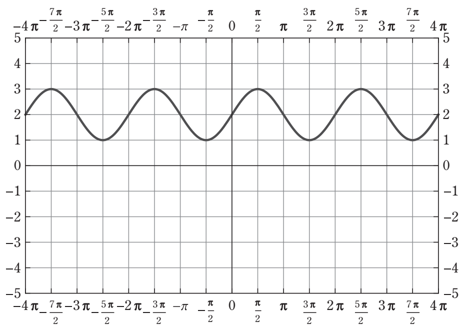
（2） 関数 $y = \sin t + 2$ のグラフを描け。

解答

(1) y 方向に上下 3 倍に伸びたグラフになる。



(2)　全体として y 方向へ 2 だけ平行移動したグラフになる。



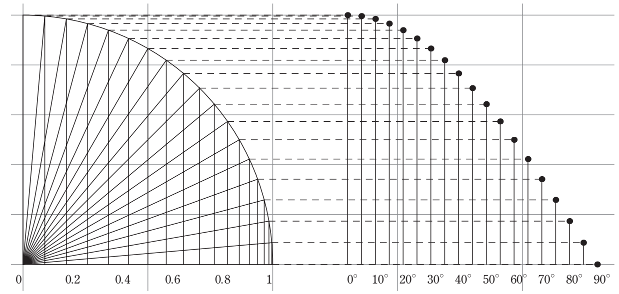
演習問題 2-3

(1)　関数 $y = 2\sin t$ のグラフを描け。

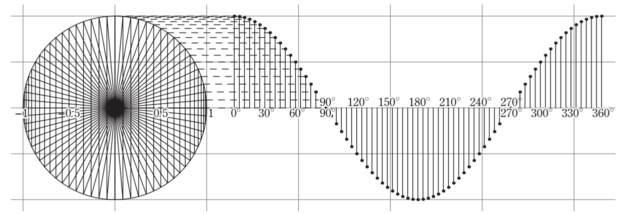
(2)　関数 $y = \sin t + 1$ のグラフを描け。　　（答えは 242 ページ）

$x = \cos t$ のグラフ

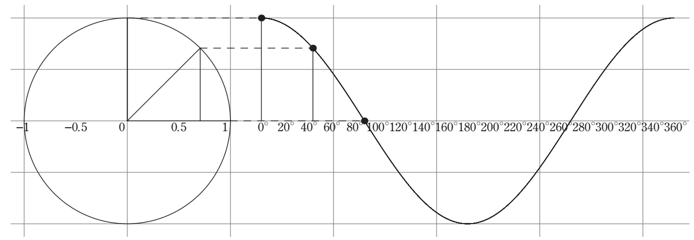
(2.1)式から、$\cos t^\circ$ の値を求めるには、$\sin(90^\circ - t^\circ)$ の値を取ればよい。例えば、$\cos 10^\circ$ の高さに、$\sin 80^\circ$ の高さを取ればよい。次のようなグラフになる。



$0^\circ \leqq t \leqq 360^\circ$ の範囲では次のようになる。

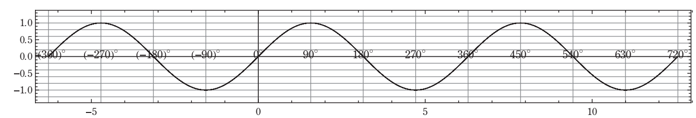


棒の先端を結んで滑らかな曲線にすると次のようになる。

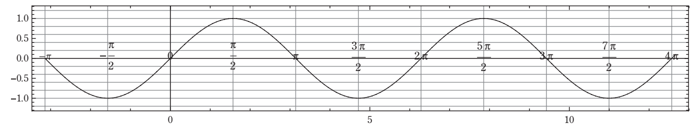


一般角のグラフ

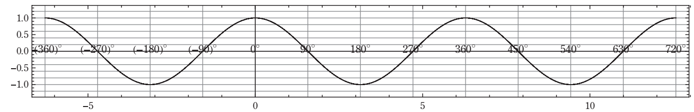
角度の範囲を一般角として、$-360^\circ \leqq t^\circ \leqq 720^\circ$ の範囲で $y = \sin t^\circ$ のグラフを描くと次のようになる。



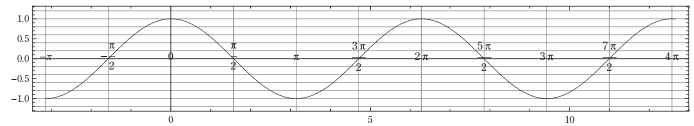
角度の範囲を一般角として、弧度法で $-\pi \leqq t \leqq 4\pi$ の範囲で $y = \sin t$ のグラフを描くと次のようになる。



角度の範囲を一般角として、$-360^\circ \leqq t^\circ \leqq 720^\circ$ の範囲で $y = \cos t^\circ$ のグラフを描くと次のようになる。



角度の範囲を一般角として、弧度法で $-\pi \leqq t \leqq 4\pi$ の範囲で $y = \cos t$ のグラフを描くと次のようになる。



周期と振幅

三角関数の周期

$y = f(x) = \sin x$ のグラフを見ると、$x = 2\pi$ 以降は、$0 \leqq x \leqq 2\pi$ と同じグラフがあらわれてくる。式で表すと次のようになる。

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

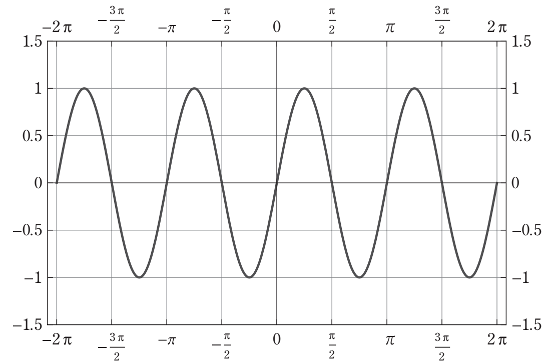
このような性質がある関数を「**周期関数**」といい、三角関数の 2π のような数値を「**周期**」という。

すなわち、一般に、関数 $y = f(x)$ が周期関数であるとは、次の式が成り立つ p が存在するときである。

$$f(x + p) = f(x)$$

このような p の中で正の最小の数値を「周期」と呼ぶのである。

ところで、$y = \sin 2x$ のグラフは、次のようになる。

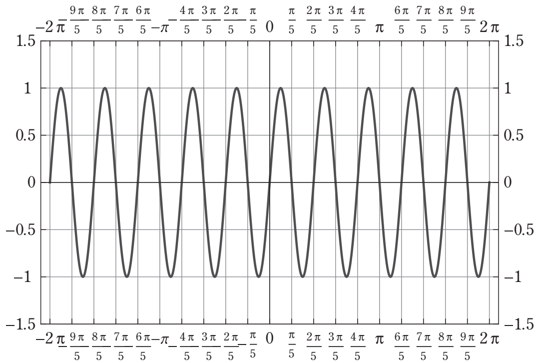


周期が π になっていることがわかる。これを式の上で考えれば、$\sin x$ の周期は、$x = 2\pi$ が周期であるから、$\sin x$ は、$x = x + 2\pi$ のとき $\sin x$ と同じになる。$\sin(x + 2\pi) = \sin x$。

よって、$\sin 2x$ の周期は、$2x = 2\pi$ となるときの x、すなわち $x = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ が周期となる。

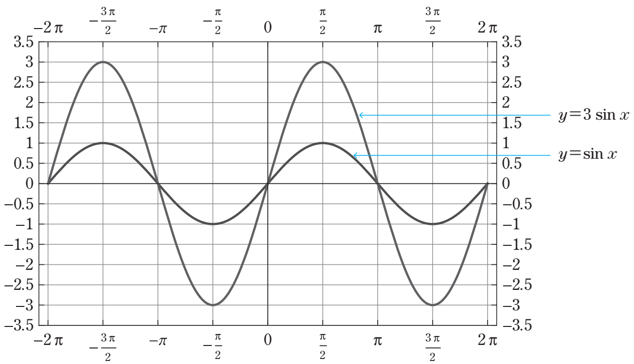
一般には、$y = \sin bx$ の周期は、$bx = 2\pi$ となるときの x、すなわち $x = \dfrac{2\pi}{b}$ が周期となる。

例えば、次の図のように、$y = \sin 5x$ の周期は $x = \dfrac{2\pi}{5}$ となる。



三角関数の振幅

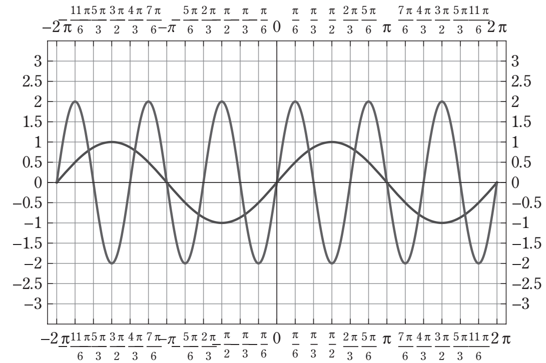
$y = 3\sin x$ のグラフは次のようになる。比較しやすいように、$y = \sin x$ のグラフと両方描いてある。



$y = 3\sin x$ は、y の値が取りうる範囲が $-3 \leqq y \leqq 3$ で、$y = \sin x$ の取りうる値の $-1 \leqq y \leqq 1$ に対して、y 方向に 3 倍に伸びていることがわかる。この値を「**三角関数の振幅**」という。

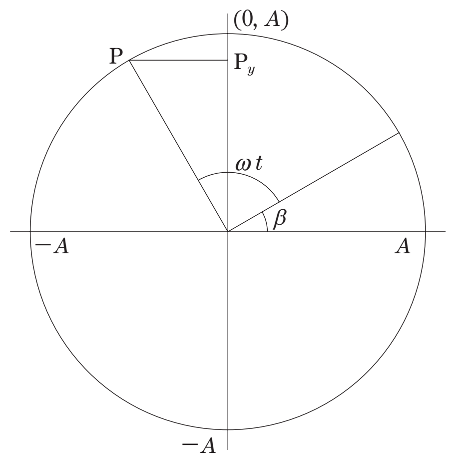
一般に、$y = a\sin x$ の振幅は a である。

周期と振幅を合わせて、$y = a\sin bx$ の周期は $\dfrac{2\pi}{b}$、振幅は a である。例えば、$y = 2\sin 3x$ の周期は $\dfrac{2\pi}{3}$、振幅は 2 であり、グラフは次のようになる。



等速円運動と単振動

半径が A の円周上を等速で回転する点 P があるとしよう。点 P は最初は角度 β の位置にいて、そこから毎秒回転する角度が一定で ω とすると、t 秒後の角度は $\theta = \theta(t) = \beta + \omega t$ である。



t 秒後の点 P の y 座標は $y = A\sin\ (\beta + \omega t)$ と表せる。点 P を真横から y 軸上に影を落とした点 P_y の y 座標とも考えられる。点 P_y は、A と $-A$ の間を行ったり来たり規則的な移動をする。このような動きを