



文字式には、なぜルールがあるのか？ その歴史とは？

中1

ひとつ前の項目で、文字式のさまざまなルールを解説しました。ルールですから、守らないと数学のテストなどでバツになることもあります。これは、スポーツに例えると、ルールを守らないと反則（ファール）をとられてしまうのと似ています。

とはいえ「なぜ、こんなにたくさんルールがあるのか？」「ルールを覚えるのが大変だ」「それぞれのルールが成り立つ理由は何？」など、さまざまな疑問をおもちになったかもしれません。

これら文字式のルールは、初めから存在したものではありませんでした。**長い数学の歴史において、少しずつ形を変えながら、現在のわかりやすい形になっていった**のです。

これもスポーツに例えると、例えば、テニスは初めから現在のルールであったわけではありませんでした。実際、11世紀頃のテニスでは、今のようなラケットを使わず、手のひらや手袋でボールが打ち合われていたといわれています。そこから、長い年月を重ねて、現在のルールができていったのです。

この項目では、**文字式のルールが存在する理由**や、**どのように現在のルールに変化したか**、などについてみていきます。

●文字式のルールが存在する理由とは？

まず、文字式のルールが存在する理由について、「**ルールがないと、みなバラバラの答えを求めて混乱が起きるため**」ということが考えられます。例えば、「 $a \times c \times 1 \times b \times b$ 」という式を、文字式のルールにしたがって表す問題があったとしましょう。

もし、文字式にルールがなかったら、「 $ac1bb$ 」「 $1abbc$ 」「 $abc1$ 」「 b^2ca 」などなど、みなそれぞれに好き勝手な答えを求めてしまい、わかりにくくなって混乱が生じます。

一方、文字式のルールをきちんと守れば、「 $a \times c \times 1 \times b \times b = ab^2c$ 」のように、答えはひとつだけになり、だれもがスムーズに理解し合えるようになります。共通のルールを守ってこそ、数学が世界共通の学問になりうるのです。

●文字式のルールは、どのようにして現在のものになったのか？

先述した通り、文字式のルールは初めから存在したものではなく、長い数学の歴史において、少しずつ形を変えながら、現在のわかりやすい形になっていきました。

文字式の積の表し方に「**同じ文字の積は、累乗の指数を用いて表す**」というルールがありました。例えば、「 $a \times a \times a$ 」なら、 a が3個かけられているので、「 a^3 」と表すルールです。このルールも初めから存在したものではありませんでした。

フランスのヴィエト（1540～1603）は、3乗を「cubus」という言葉で表しました。例えば、現在なら「 $A \times A \times A$ 」を「 A^3 」と表します。一方、ヴィエトはわざわざ「A cubus」と書いたのです。

同じフランスのデカルト（1596～1650）は、現在とほとんど同様のルールで文字式を表記しました。例えば、「 $a \times a \times a + b \times b \times b$ 」という式なら、「 $a^3 + b^3$ 」のように表したのです。ただし、2乗だけは「 a^2 」のように書かず、「 aa 」のように、文字を重ねて表していました。

デカルトは、ヴィエトが用いていた「A cubus」のような表記を、もっとシンプルにするべきだと考えていたようです。それは、デカルトの著書からもわかります。



単項式と多項式の違いは何か？

中1・中2

「単項式と多項式の違いて何？」

このように質問すると、答えにつまる生徒は少なくありません。

中学校の数学の授業で、文字式について習うとき、「単項式、多項式」に加えて、「係数、次数」などの用語がよく出てきます。これらの用語の意味がわからないために、授業をなかなか理解できなかつたり、つまづいてしまったりするケースもみられます。

そこで、この項目では、**文字式について理解するために、最低限おさえておくべき用語**について解説します。

【文字式でおさえるべき用語】

- **単項式** … $7a$ 、 $-3x^2$ のように、**数や文字のかけ算だけでできている式**。
 x や -8 のような、**1 つだけの文字や数も単項式にふくまれる**。
- **係数** … $7a$ の 7 や、 $-3x^2$ の -3 のように、**文字をふくむ単項式の数の部分のこと**。

(単項式での係数の例)

$$7a$$

↑
係数は 7

$$-3x^2$$

↑
係数は -3

- **多項式** … $5x-6y+2$ のように、**単項式の和の形で表された式**。
※ $5x-6y+2 = 5x+(-6y)+2$ と変形できるので、単項式の「和」といえる。

「そこで、例えば $2a^3$ と書けば、これは a なる文字によって示されかつ三つの関係を含むところの量の、二倍、というに同じい。このような手段により、多くの語を短く要約することができる (後略)」

(デカルト著、野田又夫訳『精神指導の規則』岩波文庫、ルビは著者)

引用文の「同じい」は「同じである」という意味です。この文からも、デカルトが、文字式のルールをできるだけ簡単なものに統一しようと意図していたことが読み取れます。

また、万有引力の法則を発見した、イギリスのニュートン (1642 ~ 1727) は、1676 年に書いた手紙の中で「 aa 、 aaa 、 $aaaa$ をそれぞれ a^2 、 a^3 、 a^4 と表す」むねを述べています。これらの資料から、ヨーロッパの数学者の間では、17 世紀半ばから後半にかけて、現在使われている累乗の表記のルールが定着していったことがわかります。

この項目では、「同じ文字の積は、累乗の指数を用いて表す」というルールについて、それが歴史的にどのように変わっていき、現在の形になったのかをみてきました。他のルールについても、同じように徐々に変化して行って、現在の姿になっていったのです。

ルールを覚えるのは、楽しい作業だとはいええないかもしれません。しかし、過去の数学者達が、できるだけシンプルで、みながわかりやすいように努力しあって現在の形になったことを知れば、文字式のルールについて、少しでも興味をもてるのではないのでしょうか。



- **項** … 多項式で、+ で結ばれたひとつひとつの単項式。

例えば、 $5x - 6y + 2$ は、 $5x + (-6y) + 2$ と変形できるので、項は $5x$ と $-6y$ と 2 である。

(多項式での項の例)

$$5x - 6y + 2$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{項}}}{5}x + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{項}}}{(-6)}y + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{項}}}{2}$$

- (単項式での) **次数** … 単項式では、かけあわされている文字の個数を、その式の**次数**という。

例えば、単項式 $5xyz$ は、 x と y と z の 3 つの文字がかけあわされているので、 $5xyz$ の**次数は 3** である。

また、単項式 $6ab^3$ は、 a と b と b と b の 4 つの文字がかけあわされているので、 $6ab^3$ の**次数は 4** である。

$$5xyz = 5 \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{文字}}}{x} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{文字}}}{y} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{文字}}}{z}$$

文字が3つかけあわされているので
次数は3

$$6ab^3 = 6 \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{文字}}}{a} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{文字}}}{b} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{文字}}}{b} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{文字}}}{b}$$

文字が4つかけあわされているので
次数は4

- (多項式での) **次数** … 多項式では、それぞれの項の次数のうち、もっとも大きいものを、その式の**次数**という。次数が 1 の式を **1次式**、次数が 2 の式を **2次式**、次数が 3 の式を **3次式**、…という。

例えば、多項式 $a^2b + 3ab + 5b$ では、それぞれの項のうち、**項の次数がもっとも大きいのは a^2b の 3** 。だから、この多項式は、**3次式** である。

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{次数3}}}{a^2}b + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{次数2}}}{3}ab + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{次数1}}}{5}b$$

次数がもっとも大きい → この多項式は **3次式**

まとめると、 $7a$ 、 $-3x^2$ のように、数や文字のかけ算だけでできている式が単項式で、一方、 $5x - 6y + 2$ のように、単項式の和の形で表された式が多項式です。

この項目で解説した用語の意味をおさえておくことで、文字式についての説明をより理解しやすくなります。特に、「**次数**」は、**単項式と多項式でその意味が違う**ので、注意しましょう。





数学者ディオファントスは、何歳まで生きたのか？

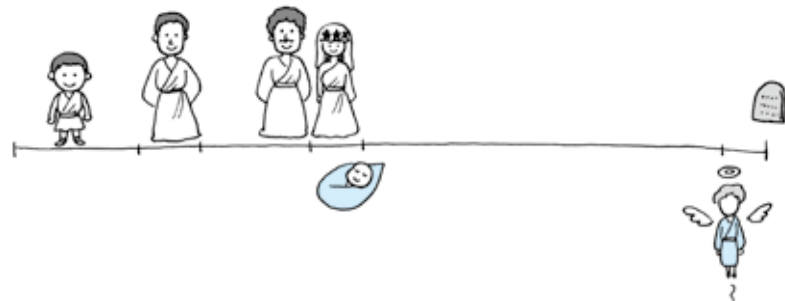
中1

エジプトに、ディオファントス（250年頃）という数学者がいました。彼のお墓には、「彼が何歳まで生きたか」ということについて、次のような文が刻まれていたそうです。

「ディオファントスは、一生の $\frac{1}{6}$ を少年期、 $\frac{1}{12}$ を青年期として過ごした。さらに、一生の $\frac{1}{7}$ が経ってから結婚し、その5年後に息子が誕生した。しかし、その息子は、父の一生の半分の年月しか生きられなかった。息子の死後4年経って、ディオファントスはこの世を去った。」

上の文章より、ディオファントスが、何歳まで生きたかわかるでしょうか。方程式の練習にもなりますので、自力で解けそうな人は解いてみましょう。

これは、**1次方程式の文章題**として考えると、次のページのように、3ステップで求められます。



解き方

(ステップ1) 求めたいものを x とおく

彼の亡くなった年齢を x 歳とします。

(ステップ2) 方程式をつくる

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

少年期 青年期 一生の $\frac{1}{7}$ 経って結婚 5年後息子誕生 息子は父の半分の寿命 4年後なくなる 全部たすと寿命になる

x の係数を、分母の最小公倍数の84で通分する

(ステップ3) 方程式を解く

$$\frac{14}{84}x + \frac{7}{84}x + \frac{12}{84}x + \frac{42}{84}x + 9 = \frac{84}{84}x$$

$$\frac{75}{84}x + 9 = \frac{84}{84}x$$

左辺の同類項をまとめる

$$9 = \frac{84}{84}x - \frac{75}{84}x$$

$\frac{75}{84}x$ を右辺に移項

$$\frac{9}{84}x = 9$$

右辺を計算して、両辺を入れかえる

$$x = 9 \div \frac{9}{84}$$

両辺を $\frac{9}{84}$ で割る

$$x = 9 \times \frac{84}{9} = 84$$

答え 84歳

これにより、彼が84歳まで生きたことがわかりました。

ディオファントスの主な著作に、全13巻（現存しているのは6巻分のみ）の『算術』があります。この『算術』は、後に翻訳されて、ヨーロッパでの代数学の発展に大きく寄与したとされています。

彼自身が、自分のお墓に、先ほどの文章を刻むように誰かに頼んだのか、彼以外の人の意思で書かれたのかはわかりません。しかし、お墓にまで数学の問題が刻まれていることから、ディオファントスが生きたその一生を、いかに数学にささげたかが伝わってくる気がします。



不等式とは何か？

中1

ここまで、等式の性質や、移項の考え方をを使って、さまざまな方程式を解いてきました。中学数学では、等式だけでなく、不等式についても、その基礎を学びます。第3章は1次方程式についての説明ですが、補足として、不等式について解説していきます。

p.23で、数の大小を表す記号である不等号（ $<$ と $>$ ）について解説しました。不等号には、さらに2種類（ \leq と \geq ）があります。それぞれの読み方は、 \leq が「小なりイコール」、 \geq が「大なりイコール」です。その使い方と意味をまとめると、次のようになります。

使い方の例	意味
$x < 7$	x は 7 より小さい (7 未満)
$x \leq 7$	x は 7 以下
$x > 7$	x は 7 より大きい
$x \geq 7$	x は 7 以上

ここで、「7以上」と「7以下」は、7が入ります。一方、「7より（小さい、大きい）」と「7未満」は7が入らないことに注意しましょう。「7より小さい」と「7未満」は同じ意味です。

等式には、両辺（左辺と右辺）がありましたが、これは不等式も同様です。例えば、「 $x+2 < y$ 」という不等式についてみると、次のようになります。