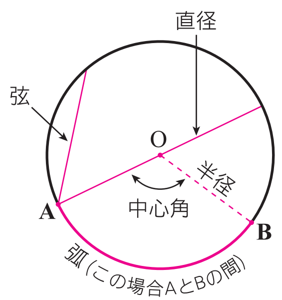
XIV　円および扇形

いかがですか？　この程度ならばまだまだ余裕ですか？　ここで悲しいお話をしなくてはなりません。

実は余裕はここまででして、これからはみなさんが（？）苦手な“円”のお話をすることになります。それも、面積や円周のような問題ではないんですね〜。でも、やらなくてはいけないのでやってしまいましょう。また、ここでの知識がつぎの“作図”に関係してきますのでとっても大切なんですよ！

①円の部分名

円にはいろいろ名前がついています。この名称は絶対に覚えなくてはいけません。



直径：円周上の２点および中心を通る線分
半径：中心と円周上の１点を結んだ線分
弦：円周上の２点を結んだ線分
弧：円周上の一部分（右上図では AB の間の円周上の長さ）
中心角：中心から半径を２本引いたときにできる間の角

さて、ここまでで言葉の説明は終了し、今度は 円と弦 、および 円と接線 の性質について説明しますよ。

「たいへんですよね〜！」

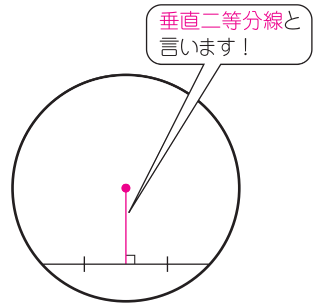
②円と弦の関係

・弦について

中心から弦に垂線を引くと、弦の真中（中点）で交わります。

この円と弦との関係はと〜っても大切なことなんですね！　作図の知識が案外大学入試のときなんかでも役に立つんです！！

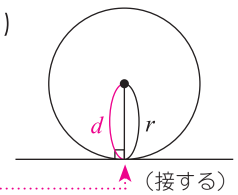
本当だよ！



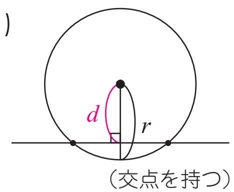
③円と接線の関係

“接線”ってわかります？　直線と円周が同じ１点を通ることを言うんですよ。イメージできますかね？（ｉ）の図を見てください。直線と円周が接していますよね。この接している部分を**接点**と言います。ほら！　接点と点が関係しているでしょ。ここでは（ｉ）の接する関係を基準に（ⅱ）の交わる、（ⅲ）の離れる関係を“中心からの距離”と“半径”との関係で確認することが目的なんです。

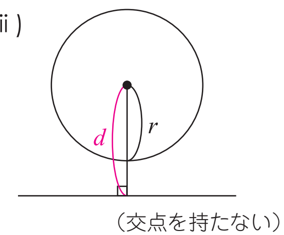
(ｉ)



(ⅱ)



(ⅲ)



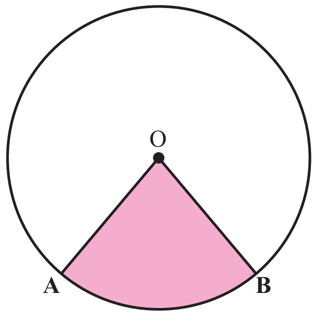
［距離と半径の関係　重要!!］

（ｉ）　$d = r$
（ⅱ）　$d < r$
（ⅲ）　$d > r$

d：中心から直線までのキョリ
r：半径

④円と扇形の関係

さて、今度は扇形（おうぎがた）です。扇子（せんす）を見たことありますか？　夏の暑いときに開いて、パタパタあおぐアレです。その形を思い出してくださいね。右図の OAB が扇形になります。



ここではこの扇形の**面積**・**弧の長さ**・**中心角**を求める方法を説明したいと思います。ここは苦手な人が多いんでしょうね！　イヤだけどやりますかぁ・・・

本当につらいですよね～!!

せっかくですから、上の扇形を使って話を続けますね。

> **問 題**　半径 3［cm］で中心角 60°の扇形 OAB において
> （1）　扇形 OAB の面積
> （2）　弧 AB の長さ
> を求めてみましょう。

＜解説・解答＞

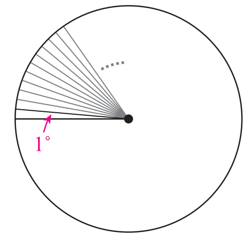
「円の中心角を知っていますか？」中心 O の周りの角度のことで、グルッと回ると 360°になります。これがポイントです！

中心 O から半径をたくさん引いて、円を 360 等分してしまえばすべて解決です！　　簡単！　かんたん！　カンタン！　「ほんとかなぁ～？？」

つぎのページのように、中心から線を引き中心角 1°の扇形を 360 個集めれば円の面積になり、またその弧を 360 個集めれば円周になりますよね。

この考え方を利用し、扇形がいったい何個の“1°の扇形”でできているかを考えればよいんです。　　「おわかりかな・・・？」

そうだな～・・・、先に“公式”を教えてしまいましょうか！



$$\text{扇形の面積} = （\text{円の面積}）\times \frac{\text{中心角}}{360} \quad \cdots\cdots（\text{i}）$$

$$\text{扇形の弧の長さ} = （\text{円周の長さ}）\times \frac{\text{中心角}}{360} \quad \cdots\cdots（\text{ii}）$$

上の話は理解できたと思いますので、この公式の意味も大丈夫だよね？!　では、この公式を使ってさっさとすませてしまいましょう!!

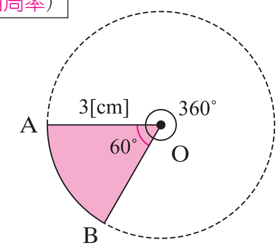
（1）　円の面積＝（半径）×（半径）×π（円周率）

$$\text{面積} = 3 \times 3 \times \pi \times \frac{\cancel{60}^{1}}{\cancel{360}_{6}}$$

円の面積

$$= \cancel{9}^{3}\pi \times \frac{1}{\cancel{6}_{2}}$$

$$= \frac{3}{2}\pi$$



$\frac{3}{2}\pi$［cm²］　・・・・・（こたえ）

π：パイと読む
π ＝ 3.14……

（2）　円周 ＝（直径）× π　　直径 ＝（半径）× 2

$$\text{弧の長さ} = 3 \times 2 \times \pi \times \frac{\cancel{60}^{1}}{\cancel{360}_{6}}$$

円周の長さ

$$= \cancel{6}^{1}\pi \times \frac{1}{\cancel{6}_{1}}$$

図形も計算があるんだ・・・
キライだー

$= \pi$

π [cm] ・・・・・（こたえ）

最後に、扇形の中心角を求める問題を片づけてしまいますか？

問 題

（1）半径 6 [cm]、弧の長さ 6π [cm] の扇形の中心角は？

（2）直径 4 [cm]、面積が π [cm²] の扇形の中心角は？

＜ 解説・解答 ＞

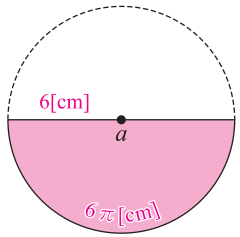
ポイントは中心角を a とおき、公式に代入すれば OK !!

（1）$\boxed{公式（ii）}$ より

$$\underbrace{2\times\cancel{6}^{1}\times\cancel{\pi}^{1}}_{\boxed{円周}}\times\frac{a}{360}=\cancel{6}^{1}\cancel{\pi}^{1}$$

$$\frac{a}{180}=1$$

$$a=180$$



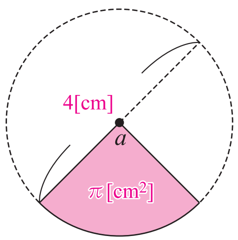
中心角 180° ・・・・（こたえ）

（2）$\boxed{公式（i）}$ より　[半径：4 ÷ 2 ＝ 2]

$$\underbrace{2\times2\times\cancel{\pi}^{1}}_{\boxed{円の面積}}\times\frac{a}{360}=\cancel{\pi}^{1}$$

$$\frac{a}{90}=1$$

$$a=90$$



中心角 90° ・・・・（こたえ）

ごめんね！　実はまだ面積の問題があと 1 問ありました。

「おこっているよね〜？」

問 題

半径が 6 [cm]、弧の長さが 4π [cm] のとき、扇形の面積を求めてみよう !!

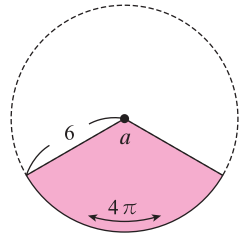
＜ 解説・解答 ＞

中心角がわからないので、少し面倒そうですね！

でも実はもう 1 つ公式があるんだよ〜！

とにかく今までの考え方で解いてみましょう。

方針としては、とにかく中心角を a とおいて、求めなくてはいけませんね。



まず公式に代入！

（弧の長さ）$4\pi = 2\times6\times\pi\times\frac{a}{360}$ ・・・・①

（面積）$= 6\times6\times\pi\times\frac{a}{360}$ ・・・・・・・・②

あれ？　①、②の式を比較してみてください。「気がつきません？」

私は気づきましたよ！　面積が求められればよいのであって、別に中心角が知りたいわけではないんですからね！　①の式から $\frac{a}{360}$ の値がわかれば②の式に代入して解決なんじゃないのかな？！　決まった！

方針を変えます。①より

$$2\times6\times\cancel{\pi}^{1}\times\frac{a}{360}=4\cancel{\pi}^{1}$$

$$\frac{a}{360}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \quad ・・・（＊）$$

よって、②に（＊）を代入！

$$（面積）=6\times\cancel{6}^{2}\times\pi\times\underbrace{\frac{1}{\cancel{3}_{1}}}_{\boxed{\frac{a}{360}}}$$

$$=12\pi \text{ [cm}^2\text{]} \quad ・・・・・（こたえ）$$

案外簡単にできてしまいましたね！　でも、もっと簡単にすぐ答えが出る公式があるんです！！　知りたい？　どうしようかなぁ～・・・

仕方ないなぁ～！　授業だったら自分で公式を導かせるけど、今回は私がやりますから、公式の仲間に入れておいてくださいね。「興味ある人だけ読む！」

では、ここでまず下のように文字を使います。読まなくても OK ！！

（扇形の弧の長さ）：l,　（面積）：S,　（半径）：r

$$l = 2\pi r \times \boxed{\frac{a}{360}} \quad \cdots (\mathrm{A}) \qquad S = \pi r^2 \times \boxed{\frac{a}{360}} \quad \cdots (\mathrm{B})$$

$\boxed{\frac{a}{360}}$ が共通。そこで（A）を変形

$$2\pi r \times \frac{a}{360} = l$$

だから、

$$\boxed{\frac{a}{360}} = \frac{l}{2\pi r} \quad \cdots (\mathrm{C})$$

この（C）を（B）の $\boxed{\frac{a}{360}}$ に代入しますよ！

$$S = \pi r^2 \times \frac{l}{2\pi r} = \cancel{\pi} \times \cancel{r} \times r \times \frac{l}{2\cancel{\pi}\cancel{r}} = \frac{1}{2}lr$$

よって、公式は以下のようになりますね！　公式だけは覚えること！

公式：　$S = \dfrac{1}{2}lr$　（弧の長さと半径だけで面積がわかる）

では、先ほどの問題をこれを使って解いてみましょう。

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\pi = \underline{12\pi\ [\mathrm{cm}^2] \quad \cdots\cdots (\text{こたえ})}$$

となり、簡単にできてしまいましたね！　やれやれ！　おわった！！！

ひとりごと・・・

そのわりにはやけに大きいな～！

実は私、劣等感のかたまりなんですよ！　小・中・高と成績は最悪！　特に中学時代は超肥満児で成績は学年 350 人中 310 番台。デブで成績が悪かったゆえ、一部の成績の良いヤツらからよくからかわれましたよ！　高校も進学校ではなく、相変わらず成績は良くありませんでした！　しかし、それでも **“夢”** はあり、無理を承知で志望校を受験。当然のことながら、数学の答案には受験番号しか書けずに、**2 時間**数学の白紙答案 4 枚とのニラメッコ。回収されるときのみじめさ、わかりますか？　その後自分なりに勉強しましたが成績は上がらず、勇気を出して、当時**受験数学の神様**と言われた **“なべつぐ先生”**（渡辺次男先生）のところへ“数学を教えてください”と新宿の予備校へ・・・。

当時先生は 70 歳を越えていたと思います。なべつぐ先生は一言も言わず、私の参考書の問題に淡々と 10 問ほど印をつけ、無言で返されました。私はその問題をノートにやり、チェックをしてもらうためだけに明くる日の朝 7 時までに新宿の予備校へ。そして、最初の問題が間違っていたならば、ノートに大きくバッテンされ、無言でノートがつき返される。この生活がほとんど毎日つづき、半年を過ぎた頃、先生が勘違いをされ大きくノートにバッテンを。しかしすぐに気づき「すまん！　おわびにこれをあげよう！」と小さい石のホルダーを私にくれました。この時点までの半年間、先生からはまったく声をかけられていないんです。驚きましたよ！　この石のホルダーは今でも私の宝物です。そして、受験がおわり、結果は不合格。先生からは一言「**どうして君が落ちるんだ・・・！**」と。　私は不合格のことも忘れその言葉がうれしくてね～！！

先生には約 2 年間ノートを見ていただきましたが、このたった 5 分の 2 年間が今の私の数学の源です。みなさんはたった 5 分間、ノートを見てもらうためだけに毎日**朝 5 時半**起き、これを **2 年間**続けられますか？？

私が伝えたいのは、**人は必ず他人には言えない、つらい努力をしている**ということです。これを読んで勉強している人たちも、あきらめずに少しずつ、ゆっくりでいいからがんばってほしいんですよ。数学のできないつらさは、誰よりもわかっているつもりです。「**数学を勉強していて“涙”が出てきたことがありますか？**」私は何度もあります。本当ですよ。

実は、私はまだ子供の頃の **“夢”** がかなわずにいます。それゆえ、未だ夢をあきらめきれずに努力しています。“つらい”のはあなただけではありません！　一緒にがんばりましょうよ！

“ 夢なくして人生とはなんぞや！ ” **みんながんばろ～ぜ！！**