21.

正準方程式

前章まで，一般座標と一般速度の関数であるラグランジアンを基本的な量として力学を構成する，ラグランジュ形式を論じてきた。しかし，解析力学の定式化の方法はラグランジュ形式だけではない。

本章では，一般座標と一般運動量の関数を基本的な量とするハミルトン形式を扱う。速度よりも運動量の方を基本とすることで，量子力学や統計力学への応用に適した理論形式を手にすることができ，また物理法則の普遍的な構造の理解を確かなものにしてくれるのである。

それでは早速，一般座標と一般運動量の関数を構成するために，q，$\dot{q}$，t の関数（ラグランジアン）から q，p，t の関数を作ることを考える。出発点となるのは，ラグランジアン $L=L(q,\ \dot{q},\ t)$ の全微分，

$$dL=\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{21.1}$$

である。

この式の右辺第 1 項にはラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{21.2}$$

が，また右辺第 2 項には一般運動量

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{21.3}$$

が含まれているので，それぞれを代入することにより，次のように表せる。

$$dL=\dot{p}_i dq_i+p_i d\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{21.4}$$

なお，第 1 項ではラグランジュ方程式を

$$\dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{21.5}$$

として，一般運動量で表してから代入している。

さて，L は q，$\dot{q}$，t の関数であるので，自動的に L の全微分 dL も q，$\dot{q}$，t の関数となる。このことは，dL の右辺が（21.1），(21.4）のように dq，$d\dot{q}$，dt の 1 次式の足し合わせであることからも保証される。すなわち，今得ようとしている q，p，t の関数は，その全微分が

$$X_i dq_i+Y_i dp_i+Zdt \tag{21.6}$$

という dq, dp, dt の 1 次式の足し合わせで表せなければならない。

（21.6）を（21.4）の右辺と比較すると，

$$|X_i|=\dot{p}_i \tag{21.7}$$

$$|Z|=\frac{\partial L}{\partial t} \tag{21.8}$$

となることが予想できる（符号は一意でないので，絶対値を付ける）が，このままでは Y が不明であるので，$p_i d\dot{q}_i$ という項を dp_i で表す必要がある。

そこで，$p_i\dot{q}_i$ に対し積の微分を適用すると，

$$d(p_i\dot{q}_i)=p_i d\dot{q}_i+\dot{q}_i dp_i \tag{21.9}$$

となり，$p_i d\dot{q}_i$ は

$$p_i d\dot{q}_i = d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i \tag{21.10}$$

と書ける。これを（21.4）に代入し，左辺を右辺に移項すると

$$dL = \dot{p}_i dq_i + d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{21.11}$$

$$\dot{p}_i dq_i + d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt - dL = 0 \tag{21.12}$$

となるから最終的に

$$d(p_i \dot{q}_i - L) = -\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{21.13}$$

を得る。

これは（21.6）において

$$X_i = -\dot{p}_i \tag{21.14}$$

$$Y_i = \dot{q}_i \tag{21.15}$$

$$Z = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{21.16}$$

とした場合の式であり，右辺が dq，dp，dt の 1 次式の足し合わせであることから，左辺 $d(p_i \dot{q}_i - L)$ は q，p，t の関数となる。この（…）内の関数を**ハミルトニアン**または**ハミルトン関数**といい，H で表す。

$$\begin{aligned} H &= H(q,\ p,\ t) \\ &= p_i \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - L \end{aligned} \tag{21.17}$$

最後の等号では念のため Σ を復活させておいたが，本章でも引き続き縮約規約を用いていくので注意していただきたい。

こうして，q，$\dot{q}$，t の関数であった L から，q，p，t の関数である H を導くことができたのであるが，この一連の操作は，或る変数を別の変数に取り替え，取り替えた後の関数形を求めるというものであり，**ルジャンドル変換**[1]と呼ばれている。本書の記述は，ルジャンドル変換の一般論を知らなくても本論を読み進められるように工夫してあるので，必ずしも必須ということはないのだが，補遺 D でルジャンドル変換の基本について簡潔にまとめておいたので，参考にしていただきたい。

さて，H を用いれば（21.13）は

$$dH = -\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{21.18}$$

となるが，一方 $H = H(q,\ p,\ t)$ の全微分は

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \tag{21.19}$$

と書ける。この 2 式は同じ内容を表しているので，右辺同士を比較することで次の 3 式が得られる。

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{21.20}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{21.21}$$

1　フランスの数学者**アドリアン＝マリ・ルジャンドル**にちなむ。19 世紀初頭の数学界では大家として知られ，整数論と楕円積分の研究で特に有名だった。