CONTENTS

Ⅳ 保存量と対称性

Ⅴ ハミルトン形式

VI 量子力学への道

VII 場の理論への応用

数学的補遺

本書を読むにあたって

小学生の頃から物理を独学し，教科書・専門書を読み漁ってきた経験から，私は読者を年齢や学年によって差別したくない。例えば本書のテーマである「解析力学」は，日本の理工系の大学では 2 年生で学ぶようであるが，そもそも私自身がこの文章を書いている時点でまだ大学 2 年生にはなっていないのである（この点に関し，できればあまり先入観を抱かないでいただきたい）。

物理に限ったことではないと思うが，教科書・参考書の著者は大学の教員である場合がほとんどであるため，大学 2 年生向けに開講される教科についての本であれば,「本書は大学 2 年生程度の学生を対象として～」と書かれることが多い。この文章の意味が「本書は大学 2 年生程度の数学・物理のレベルを持つ読者を対象として～」であると分かってはいても，読み手としてはあまり気分の良いものではない。

そこで，本書を読むための予備知識として具体的にどのようなものがどのようなレベルで必要なのかについて細かく説明しておくことにする。以下に挙げる意味での数学・物理のレベルが十分であれば，どなたでも本書を読破することができる。

本書を読むために必要な数学・物理のレベル

[数学]

高等学校「数学Ⅲ」までの基本的な知識が必要である。

しかし，高校の数学で扱われる範囲というのは時代によって微妙に異なっているので，その具体的な内容を挙げておくことにする（私が「高校数学」と言うときには，誠に勝手ながら，2017 ～ 2019 年度の間の指導要領の範囲内の数学のことを指すものとする）。

具体的には，以下のカテゴリー・トピックスについての基礎概念を理解しており，教科書の例題・練習問題レベルの基本的な計算ができれば本文を読むのに差し支えはないであろう。なお，解析力学は解析学，つまり微分積分学を駆使した力学であるから言うまでもないが，最重要項目は微積分である。

展開の公式，因数分解，命題と条件，関数 $f(x)$，三角比の定義，複素数の定義，弧度法，三角関数の定義，三角関数の相互関係，加法定理，指数と対数，極限値，導関数，冪関数の微分，定数関数の微分，極値，不定積分，定積分，平面・空間のベクトル，単位ベクトル，位置ベクトル，総和記号 Σ（記号の使い方と性質），楕円，極座標，積の微分（ライプニッツ則），合成関数の微分（連鎖律），三角関数の微分，（自然）指数関数の微分，対数関数の微分，部分積分，置換積分，速度，加速度

以上の内容に不安がある場合は，髙橋一雄『もう一度 高校数学』（日本実業出版社，2009.7）などの参考書で（微積分を中心に）復習をしていただきたい（とにかく計算ができれば良いので，高難度の受験参考書などを使う必要はない。上記の本を挙げたのは，内容・レベルともに復習には最適であるからだ）。

これ以上の数学の知識については，本文中，または巻末の数学的補遺の中で説明したので，必要に応じて参考にしていただきたい。大学レベルの数学の中で，本書で不可欠な事項は，テイラー展開，偏微分，全微分，変分法，ベクトルの外積，ヤコビアン，多重積分，ガウス積分である。この内，偏微分と変分法は本文中で説明し，残りはそれぞれ補遺 A ～ G として巻末にまとめた。

数学的補遺においても，VII 章までの本文と同様にできるだけ易しい説明を試み，単なる公式集とならないよう注意した。しかし，いずれも物理のために使うことが前提の物理数学であるので，補遺の議論は非常に直観的なものであり,（本書の中でも特に）厳密でない。式の成り立ちや仕組みを説明するために，導出・証明をしているかのような書き方をしているが，実際には（大学数学でいう）証明と呼べるレベルには全く達していないので, 数学をご専門にされている方からすればさぞ苛立たしい記述が散見されることと拝察するが，精密な議論については微分積分学の教科書を参照の上，ご容赦いただきたい。

補遺の中で最も重要なのは，補遺 B の全微分である。全微分の計算ができないと，本文中の計算が（かなり早い段階から）追えなくなってしまうので，補遺 B の内容は確実に理解する必要がある。また，本書では線形代数の知識は必要ないが，補遺 E を読む際は高校数学から削除されて久しい「行列」について，ある程度イメージを持っておいた方が読みやすいはずである（但し，読みやすいというだけで，行列を知らないと読めないというわけではない）。

[物理]

高等学校「物理」までの力学の基本的な知識が必要である。また，本書の最後の節（35 節）を読む際には，それに加えて電磁気の基本的な知識が必要となる。理想的には，大学 1 年生で学ぶ程度のニュートン力学（微積分によ

る初等力学）の基本を理解していることが望ましいが，本文中に最低限の説明があるので必須ではない。

具体的には，以下のカテゴリー・トピックスについての基礎概念を把握していることを前提とする。

速度・加速度・質量・力・ニュートンの運動方程式・仕事・運動エネルギー・位置エネルギー・保存力・力学的エネルギー保存則・運動量保存則・慣性力・円運動・単振動・波動（正弦波の式など）

I 章で解析力学への準備としてのニュートン力学の基礎を説明し，その後も適宜説明を設けることもあるが，上で挙げた項目については簡単に理解しているとして話を進める（文献［52］と同じように，それらは「その意味が読者にとっては既知である未定義の言葉」とする立場をとる）。

但し，以上の内容を復習する目的で高校物理の参考書に戻ることはあまり勧められない。その場合，大学レベルの力学の教科書を開いた方が様々な意味で有益であるからである（物理数学を身につけながら効果的に学べる本として，文献［27］と［66］を推薦しておきたい）。

次に，本書の章ごとの内容を簡単に紹介し，本書では扱いきれなかった事項についても列挙する。

本書における「独学」の道筋

I 章では解析力学の目的を説明しながらニュートン力学の基礎を復習し，ニュートンの運動方程式には座標変換に対する不変性がないという問題があることを明らかにする。さらに，自由度の概念を導入して一般化への準備を進めていく。

II 章から V 章までが解析力学の本編に相当する。解析力学の教科書の多くは，III 章で説明する最小作用の原理，または仮想仕事の原理から出発してラグランジュ方程式（解析力学の基礎方程式）を導出し，ラグランジュ形式を導入している。しかし本書ではその前にラグランジュ方程式への抵抗感を払拭することが必要であると考え，一般座標系における物理量を定義し，ニュートンの運動方程式をスカラー量が中心となる方程式に書き換えると，ラグランジュ方程式が得られるという方針をとる。そしてその後，ラグランジュ方程式に座標変換に対する不変性があることを実際に確認・証明する。

III 章ではラグランジュ方程式が単なる書き換えでないことを理解するために，変分原理によってラグランジュ方程式を導出し，最小作用の原理によるエレガントな力学の定式化を見る。また，ニュートン力学の範囲からも理解される仮想仕事の原理が最小作用の原理，及びラグランジュ方程式と整合的であることも示す。また，拘束条件のある系を取り扱うための処方箋として，ラグランジュの未定乗数法も紹介する。

IV 章では時空の対称性が保存量の存在と深く関わっていることを，エネルギー，運動量，角運動量を例に説明し，その後一般論としてネーターの定理を証明する。これによって，解析力学の理論形式は対称性を見るための道具にもなっていることが示され，個々の保存則が成り立つ背景には対称性が潜んでいるという驚くべき事実が明かされる。

V 章では解析力学のもう一つの理論形式である，ハミルトン形式を詳述する。ここでもまた，位相空間（相空間），正準変換，ポアソン括弧などといった，物理を探究するための強力な道具がもたらされ，最後の節のハミルトン＝ヤコビ方程式とともに，量子力学へと進む準備が整う。

通常，解析力学の課程はハミルトン＝ヤコビ方程式までで終了となるので，多くの文献がここで筆を擱（お）いている。しかし，量子力学と場の理論は解析力学での学びが実際にどのように活かされるかについて知るための格好の題材

であることを考えると，応用編として次の 2 章を設けずにはいられなかった。

VI 章は応用編であり，前期量子論，シュレーディンガー方程式，ハイゼンベルク方程式などに対して解析力学で得た道具がどのように応用されるかについて述べる。さらに最後の節では経路積分を説明し，最小作用の原理の種明かしを行なう。

VII 章は発展編であり，場の解析力学の初歩の初歩を扱う。前半では古典場の理論におけるラグランジュ形式を導入し，後半では解析力学の適用範囲の広さと最小作用の原理の威力を実感していただくために，電磁気学におけるマックスウェル方程式を導出する。

本書では扱えなかった事項について

かなり多くの項目を盛り込んでいるが，それでも扱いきれなかった部分は多数ある。まず，剛体の解析力学と連成振動については詳しく取り扱えていない（これらの代わりに量子力学と場の理論を入れることを選択したためである)。この 2 つについては文献［67］（第 6 章，第 7 章）などを参考にしていただきたい。

また，拘束条件のあるハミルトン形式の一般論や可積分系などの高度なトピックスについては，本書のレベルを遙かに超えるので入れることができなかった（これらについては文献［29］（II 巻)，[89］が詳しい。前者のみに関しては文献［18］,［20］などにも説明がある)。VII 章で場のハミルトン形式が抜けているのも同じ理由によるものである。

力学の歴史と，相対論への応用についての原稿も用意していたが，予想外にページ数が増えたため，これらは入れることができなかった。前者については，文献［2］,［11］,［28］を（力学の歴史を踏まえた教育的教科書として文献［16］もある)，後者については，佐藤勝彦『相対性理論』（岩波基礎物理シリーズ 9，岩波書店，1996.12）と L.D. ランダウ，E.M. リフシッツ『場

の古典論 原書第 6 版』（ランダウ = リフシッツ理論物理学教程，恒藤敏彦，広重徹訳，東京図書，1978.10）を挙げておくのでご興味のある方はこれらの良書をあたっていただきたい。