Section 0-3 「コーヒーまたは紅茶」といわれたら

レストランで食事をすると、食後の飲み物を聞かれます。

「コーヒーまたは紅茶のどちらにしますか」　……①

このとき、数学の得意な太郎くんが

「コーヒーと紅茶の両方をお願いします」

とお願いしたら、お店の人は困った顔をしました。

「コーヒーまたは紅茶」の世界

前節と同様に、コーヒーを注文するかしないか、紅茶を注文するかしないかで分類すると次の４つの世界に分かれます。

	コーヒーを注文	コーヒーを注文しない
紅茶を注文		
紅茶を注文しない		

すると、太郎くんとお店の人とのトラブルは①の解釈が異なることから生じたものと思われます。

「または」の解釈を、太郎くんは「少なくとも一方」と考えて答え、お店の人は「どちらか一方」と考えて質問したのでしょう。

太郎くんの「コーヒーまたは紅茶」の解釈

	コーヒーを注文	コーヒーを注文しない
紅茶を注文	○	○
紅茶を注文しない	○	

お店の人の「コーヒーまたは紅茶」の解釈

	コーヒーを注文	コーヒーを注文しない
紅茶を注文		○
紅茶を注文しない	○	

「高齢者または基礎疾患を有する人」とはどんな人？

同じく「コーヒーまたは紅茶」の世界ですが、コーヒーを「高齢者」、紅茶を「基礎疾患を有する人」とした場合、次の表現はいかがでしょうか。

「高齢者または基礎疾患を有する人は優先的にワクチン接種」……②

「コーヒーまたは紅茶」に対してどちらか一方のみしか頼めないと

思っている人は、この②の報道をどう受け止めるでしょうか。

もし、**「または」を「どちらか一方のみの条件を満たすもの」と捉えてしまったら**、そのときは、「高齢者で基礎疾患を有する人」はワクチン接種を受けられないことになります。

たぶん、①については「コーヒーか紅茶」の「どちらか一方のみしか頼めない」と思っている人でも、②については「高齢者で、かつ、基礎疾患を有する人」も、当然、ワクチン接種を受けられるはずだ、と解釈するでしょう。

しかし、これは困ったことです。「または」の解釈が首尾一貫していません。**状況や場合によって、「または」の解釈がコロコロ変わっている**からです。これでは、正しい意思疎通は絶望的です。場合によっては大問題を引き起こしかねません。

「でない」「かつ」「または」「ならば」……は大事にしよう

「**でない**」「**かつ**」「**または**」それに「**ならば**」などは、私たちが思考をする際、きわめて大事な言葉です。たしかに、解釈が多少曖昧な部分があっても、日常会話ではそれほどトラブルにはならないかも知れません。

しかし、世の中が複雑になり、いろいろな教養の人が混在して生活している社会では、「でない」「かつ」「または」「ならば」などの基本用語については最低限の共通認識が必要です。この基本を押さえていれば、安心して曖昧さを受け入れられるのです。

Section 0-4 明日晴れたら外で体操

小学校の先生が子どもたちに「明日、晴れたら外で体操しようね」と告げて児童を下校させました。

しかし、翌日は雨だったので、子どもたちは体操着を持参しませんでした。この判断は、通常は「正しい」と見なされます。

しかし、**論理的にはいろいろ問題があります**。おわかりですか？

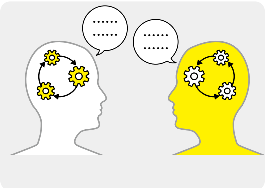
まず、明日の天気は「晴れ」以外にも「曇り」とか「雨」など別の可能性があるのに、**晴れの場合のことしか指示を与えなかった**ことです。つまり、適切な指導ではなかったのです。現代ではメールの一斉送信で当日の朝になってから連絡が入り、事なきを得るかも知れませんが、だからといって許されることではありません。

また、子どもたちにも問題があります。「晴れたら」に対して**「晴れなかったらどうするの？」と質問しなければなりません**。これは生きる知恵です。算数で高得点をとる以上に大事なことなのです。

Section 1-1「命題」という言葉に慣れよう

考えごとをしたり、会話や交渉をするときには、私たちは無意識のうちに、いろいろな論理を使っています。このとき、正しい論理を使わないと、とんでもない判断ミスや誤解が生じます。

そこで、本章では**「正しい論理」とは何か**を調べていくことにします。そのためには、まず、論理の世界でよく使われる言葉をいくつか確認しておきましょう。



命題とは

これからは、

「正しい」ことを「真（しん）」　　**「間違っている」ことを「偽（ぎ）」**

と表現することにします。また、

真偽が客観的に判断できる文章や式のことを「命題（めいだい）」

と呼ぶことにします。真、偽、命題。なんだか、すごく堅苦しく冷たい感じがしますが、慣れてください。

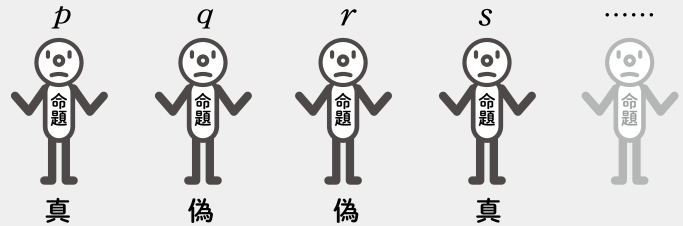
ただし、実際に応用するときは、多少、客観性に乏しくても命題と見なすことにしましょうね。
たとえば「このラーメンは旨い」なども命題ね。

ヘェ～、そうなんだ!!

命題には p、q、r、s、……などと名前を付ける

たとえば、「太郎くんは男である」とか、「太郎くんは学生である」などは、真偽が客観的に判定できる文章なので命題です。このような個々の命題に対して、便宜上、名前を付けることにしますが、本書ではアルファベットの小文字（イタリック）を使うことにします。

〔例〕　命題 p：「太郎くんは男である」
　　　命題 q：「太郎くんは学生である」
　　　命題 r：「………」



なお、「太郎くんは男の学生である」は「太郎くんは男である」という命題と、「太郎くんは学生である」という2つの命題が組み合わさったものと考えられます。

そこで、**もとの個々の命題（pやq）を単一命題（単純命題）と呼び、単一命題が組み合わさってできる命題（「pかつq」や「pならばq」）のことを合成命題（複合命題）**と呼ぶことにします。なお、本書では、単に命題といえば、単一命題を指すものとします。

まとめ
命　　題：真偽の判断ができる文章や式
合成命題：単一命題 p、q、r、s、……が組み合わさってできる命題

Section 1-2 記号 〜、∧、∨ を使おう

私たち人間が思考するときによく使われる言葉として

でない、かつ、または、ならば、……

などがあります。とりわけ、「**でない**」「**かつ**」「**または**」の3つは考える上ですごく大事な言葉です。

たとえば、「太郎くんは男の学生である」という命題は「太郎くんは男である」（命題p）と、「太郎くんは学生である」（命題q）という2つの命題を「かつ」で結びつけた合成命題と見なせます。つまり、「pかつq」のことです。

論理記号を使ってみよう

「でない」「かつ」「または」という言葉を簡単な記号 〜、∧、∨で表現しましょう。このような記号を**論理記号**といいます。

$\sim p$ …… pでない　(not p)

$p \wedge q$ …… pかつq　(p and q)

$p \vee q$ …… pまたはq (p or q)

（注）論理学では命題p, qに対し、$\sim p$をpの「否定」、$p \wedge q$を「合接」、$p \vee q$を「離接」といいます。本書では合接、離接などの専門用語はあえて使いません。

真理値と真理表

命題とは真偽が判定できる式や文章です。そこで、命題pの真偽の判定をした結果、

pが真であることをT　(trueの頭文字)

pが偽であることをF　(falseの頭文字)

と表すことにします。この**T、Fを命題pの真理値**といいます。そして2つの命題p、qからなる合成命題の真偽については、p、qの真偽の$4(=2^2)$通りの組合せの場合に分けて調べます。

また、3つの命題p、q、rからなる合成命題の真偽についてはp、q、rの真偽の$8(=2^3)$通りの組合せの場合に分けて調べます。これらの場合を表にしたものを**真理表**といいます。

真理表

真理値

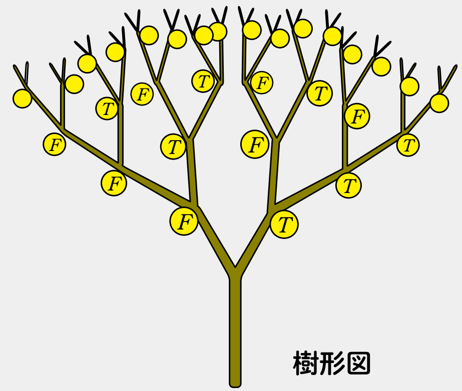
命題 p
T
F

真理表

命題 p	命題 q
T	T
T	F
F	T
F	F

真理表

命題 p	命題 q	命題 r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F



樹形図

まとめ　**論理記号**：〜（でない）、∧（かつ）、∨（または）

Section 1-3 「でない」（～）について

肯定の「である」に対し、「でない」という言葉は否定する際に使われます。日常でも「おまえは成人でない」のように使っていますが、**論理を考える上で否定ほど重要なものはない**といえます。

命題 p の否定命題 ～ p

一般に、命題 p に対しこれを打ち消した「p でない」という命題を p の**否定命題**といい　**～ p**　と書くことにします。

〔例〕「おまえは成人である」

　を命題 p とすれば、否定命題～ p は

「おまえは成人でない」

となります。

命題 p と否定命題～ p の真偽

命題 p とその否定命題～ p の真偽については次のように決めることにします。

命題 p が真のとき、～ p は偽

命題 p が偽のとき、～ p は真

この決め方は**命題 p と命題～ p が同時に真になったり、同時に偽になったりすることはない**、という考え方に基づきます。

ただ、数学に慣れていない人は「命題の真偽については次のように決めることにします」との表現にビックリしたかも知れません。しかし、**論理的に**物事を考えていく上で、どういうときに正しくて、どういうときに間違いであるかを決めておくことは大事です。

最初の段階で決めておかないと、その後の議論で「何が正しくて、何が間違いなのか」がわからなくなってしまうからです。このような取り決め（**定義**といいます）は今後もいくつか出てきますが、取り決めたことは必ず守ってください。

もちろん、取り決めに不都合が生じれば変えればいいだけのことです。取り決めを変えれば「新たな論理学」や「新たな数学」が作られるのです。論理学や数学は極めて柔軟な学問です。

記号 T は「真」、記号 F は「偽」を表す

命題 p の真偽とその否定命題～ p の真偽は非常に大事な約束事です。このことを真理表で書くと下のようになります。ただし、**記号 T は真（true）、記号 F は偽（false）を表す**ものとします（§1－2）。

なお、本書では命題 p の否定命題を～ p と書くことにしましたが、否定命題の記号は本や文献によってまちまちです。他によく使われる否定命題の記号としては $\overline{p}$、$\neg p$ などがあります。

p	～ p
T	F
F	T

この表はしっかり覚えておこう！

プロローグ
やさしい論理学 第1章 論理を表で考える
やさしい論理学 第2章 論理を図形で考える
やさしい論理学 第3章 論理雑学
付録

Section 2-1 命題と条件

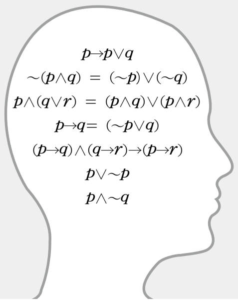
「命題」とは真偽が客観的に決まる文や式のことでした（§1−1）。たとえば次のものがあげられます。

（イ）　太郎は男である（真）

（ロ）　花子は男である（偽）

………………………

前章では、個々の命題をp、q、r、…などで表し、それらを論理記号〜、∧、∨、→、↔で結びつけた合成命題の真偽を真理表という表を用いて判定しました。



p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

この章では**集合**（後で説明します）を用いて「論理を図で見ていく」ことにします。つまり、「論理の見える化」です。

述語（性質、条件）とは

たとえば、次の文章を考えてみましょう。

xは男である　……①

すると、前ページの命題（イ）、（ロ）は①のxに太郎や花子を代入したものと考えられます。つまり、①の文章はxに太郎とか花子を代入することによって命題となります。

①のように**命題を産み出すもとの文章や式のこと**を**述語**(predicate)とか**性質**、あるいは**条件**と呼びます。本書では**条件**という言葉を採用します。xを使った条件は他にもいろいろ考えられます。

xは女である　……②

太郎くんはxをもっている　……③

xは高さが3000m以上の山である　……④

（注）　前章で扱った論理は**命題論理**、本章で扱った論理は述語（性質、条件）を扱うので**述語論理**と呼ばれています。

「条件」と「命題」の関係

上記①、②、③、④のように、xを使った条件を一般化して$p(x)$などと書くことにしましょう。このとき、条件$p(x)$そのものは真も偽もありませんが、このxに具体的なもの、たとえばaを代入した$p(a)$は真偽が判定できる命題になります。

$p(x)$　･･･　条件

$p(a)$　･･･　命題　（条件のxに具体的なものaを代入）

〔例〕①を$p(x)$としてみましょう。つまり、

$p(x) = x$は男である　……　条件

この、xに太郎を入れたのが命題（イ）であり、花子を入れたのが命題（ロ）ということになります。

p(太郎)　＝ 太郎は男である　……　命題（イ）

p(花子)　＝ 花子は男である　……　命題（ロ）

Section
2-2
集合とは

「集合」という言葉は日常生活において「ものの集まり」として何げなく使われています。この「集合」ですが、論理を考える上で欠かすことのできない重要な役割を果たします。そこで、ここでは「集合」についての初歩を調べておきましょう。

集合とは

ある条件を満たすものの集まりを集合といいます。集合は英語で**set**といいます。groupではありません。

条件として「1以上10以下の偶数」を考えれば、集合は

2、4、6、8、10

の5個の数字です。これらの数字を羅列しただけではしまりがないので、中カッコ{ }でくくって集合を次のように書くことにします。

$\{2, 4, 6, 8, 10\}$

今後、複数の集合を扱うので**集合に名前を付けておくと便利**です。その際は、通常アルファベットでイタリック体の大文字を使います。たとえば、Sを用いれば次のようになります。

$S=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

また、集合の個々のメンバーを**要素**とか**元**といいます。

2は上記の集合Sの要素ですが、このことを**記号∈**を用いて

$2 \in S$

と書くことにします。記号∈は要素（element）の頭文字Eをもとに次のようにして作成されたものです。

e → E → ∈

数学ではこのようにアルファベットを変形して記号を作ることは珍しくありません。

なお、1は上記の集合Sの要素ではありません。このことを**記号∉**を用いて

$1 \notin S$

と書きます。つまり∉という記号は、否定の意味を込めたスラッシュ「/」を∈にかぶせたものです。

ここで、注意したいことが一つあります。それは、「ある条件を満たすものの集まりを集合（set）」といいましたが、このときに使われる**条件とは、だれもが同じ判定のできる客観的なものでなければいけない**ということです。

たとえば、「美しい花」とか「背の高い人」は「条件」として、どうでしょうか。タンポポの花を美しいと見なすかどうか、太郎くんを背が高いと見なすかどうか、それは人によって判断が分かれます。もし、「背の高い人の入場料は2倍」というルールがあったら、太郎くんがあてはまるのかどうか、わかりません。社会生活において約束や規則、法律などの**解釈が人によって違ったら大混乱する**のです。

集合の２つの表現

先ほどは条件として「1以上10以下の偶数」としたため要素は5個なので中カッコを用いて

$\{2, 4, 6, 8, 10\}$ ……①

と書けました。

しかし、条件が「1以上1000以下の偶数」だとすると、要素は500個もあり、これを列挙するのは大変です。そこで、

$$\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\cdots,\ 998,\ 1000\}$$

などとぼかして書きますが、これでは「……」の部分に曖昧さが残ります。そこで、このことを避けるため、**条件そのものを記述する集合の表現方法**があります。それは、要素を文字で代表させ、その文字についての条件を記述する方法です。そのとき、**代表の文字と条件を縦棒｜で区切る**のです。つまり、代表の文字を x とすれば、

$\{\, x \mid x$**に関する条件** $\}$ ……②

となります。すると、「1 以上 1000 以下の偶数」とする集合は

$\{\, x \mid x$は 1 以上 1000 以下の偶数 $\}$

と書けます。この方法だと、要素の数がどんなに多くても確実に集合を表現することができます。

（注）**縦棒ではなくコロン「：」を使うこともあります**。

一般に、xが満たすべき条件を$p(x)$と書けば、②の表現は次のようになります。

$\{x \mid p(x)\}$ ……③

もちろん、$p(x)$とは異なる条件$q(x)$であれば、

$\{x \mid q(x)\}$ ……④

と書くことになります。

（注）③、④で使われている$p(x)$、$q(x)$は前節で紹介した「**条件**」（述語）のことです。

以上、集合の表現をまとめると、①のように要素を列挙する方法と、②のように条件を記述する方法の2つがあります。

〔例〕 次の集合を上記の 2 つの方法で表現してみましょう。

「日本のすべての都道府県名」

{北海道、青森、……、鹿児島、沖縄}　……要素を列挙

$\{x \mid x$は日本の都道府県名$\}$　……条件を記述

まとめ

集合とは

集合：ある条件を満たすものの集まり

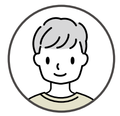
条件：だれもが同じ判定のできる客観的な文章や式

集合の表現

（イ）　要素をすべて書き出す表現　$\{1,2,3,4,5\}$

（ロ）　条件を記述する表現

$\{\, x \mid x$は 1 以上 5 以下の整数$\}$



集合は、「ある条件を満たすものの集まり」ということですが、条件とは誰もが認める客観的なものというのではなく「安くて旨いラーメン」なんて、条件とは考えられませんね？

そうはいっても、ある程度の客観性があれば、厳密ではなくても、これを集合の条件として応用上使ってしまうことはよくあるのよ。「安くて旨い」も客観性があると見なします。他にも、「まじめな人」とか「スポーツ好きな人」の集合などもそうですね。あまりお堅いことをいうとせっかく学んだ論理が日常に使えなくなります。

集合の名前　　これらが「集合」の要素

$$S = \{2, \boxed{4}, 6, 8, 10\}$$

{　} でくくる

4 は集合 S の「要素」の 1 つ（元ともいう）
$4 \in S$ とも書く

$S = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,\cdots\cdots\}$ と、
すべての要素を書き切れないとき、

$$S = \{x \mid x \text{ は正で } 2 \text{ の倍数}\}$$

と書くこともできる。

｜を入れる　　***x* の条件**

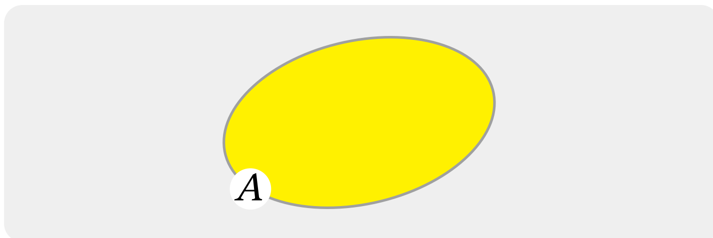
Section 2-3 ベン図とは

第1章では論理式と真理表を使って論理を考えました。慣れれば簡単な世界ですが、初めてのために戸惑った人もいたでしょう。

本章では、表ではなく集合を使って論理を考えることにします。その際、集合を図で表現したベン図と呼ばれるものを利用することにより**論理を目で見て理解することができる**のです。つまり、**論理の見える化**です。

ベン図とは

あらためて紹介するまでもなく、集合を図で表したものは小・中学生でも使っています。たとえば、集合 $A = \{x \mid x$ **はA組の生徒**$\}$ を下図のような閉じた曲線を用いて表しました。



これが**ベン図**（正しくは**ベン図式**）と呼ばれるものです。つまり、集合の様子を平面図形で表したものがベン図です。上図の場合、曲線の内側に A 組の生徒が集まっていると考えます。

（注）　ベン図式のベンとはイギリスの論理学者 J. ベン（1834 ～ 1923）の名前です。