

1章 微分で物理現象をひもとくと

| | | |
|---|--|----|
| 1 | なぜ、物理で微分・積分を外せないのか | 16 |
| | 微積分を勉強する意味が分からない | 16 |
| | ニュートンは「目的」を知っていた | 17 |
| 2 | 速度から微分を考える | 19 |
| | 「速度」は直接には測れない? | 19 |
| | 速度を測るのに2点はいらぬ? | 21 |
| 3 | 速度の定義を離れて数学としての微分を考える | 24 |
| | 「滑らかで連続」が微分のできる条件 | 24 |
| | dy/dx には分数の意味があるのか、それとも | 25 |
| 4 | $f(x) = x^n$ の微分、 $\frac{df}{dx} = nx^{n-1}$ を証明する | 27 |
| | 次数を下げる微分の働き | 27 |
| | $f(x) = x^n$ の微分 | 28 |
| 5 | 微分は整数を超えて拡張する | 31 |
| | 有理数への拡張を考えてみよう | 31 |
| | 合成関数の微分 | 32 |
| | まずは、指数関数を復習する | 33 |
| | 次に、対数関数を復習する | 36 |
| 6 | 指数関数、対数関数の微分 | 39 |
| | $y = e^x$ の微分は、 $dy/dx = e^x$ で、微分によって形を変えない | 39 |
| | 対数関数の微分 | 41 |
| 7 | 三角関数を微分する | 43 |
| | 指数関数と三角関数の深い仲 | 43 |
| | 三角関数の微分 | 46 |

2章 積分は微分の逆演算

| | | |
|---|--------------------|----|
| 1 | 「仕事」は面積で表される | 52 |
| | 積分とは何か | 52 |
| 2 | 定積分と不定積分 | 54 |
| | 積分法.....小さな短冊を無限に | 54 |
| | 微分と積分は逆演算 | 57 |
| | 定積分を求めるには原始関数を探ること | 59 |

| | | |
|---|------------|----|
| 3 | 不定積分の公式 | 61 |
| | 不定積分の性質 | 61 |
| | 積分の計算はやっぱり | 62 |

3章 微分方程式が自然界を記述する

| | | |
|---|-----------------------------|----|
| 1 | 微分方程式を解く | 66 |
| | 微分を含まない方程式に変換する | 66 |
| | x と y を分離できれば、微分方程式は解ける | 66 |
| | 特性方程式とは | 68 |
| 2 | 「放射性元素」の崩壊を微分方程式で | 71 |
| | 放射性物質の存在量と時間の関係 | 71 |
| 3 | 「惑星の運動」を微分方程式で解く | 73 |
| | ニュートン力学に挑戦する | 73 |
| | ケプラーの3つの法則 | 76 |
| 4 | バネの運動を解く | 81 |
| | バネの運動とフックの法則 | 81 |
| 5 | 成長曲線=ロジスティック曲線を解く | 83 |
| | ウサギの驚異的な増殖とフィボナッチ数列 | 83 |
| | ロジスティック曲線を描いてみる | 84 |

4章 テイラー展開は近似値計算の女王

| | | |
|---|--------------------|-----|
| 1 | テイラー展開とは | 88 |
| | 関数は、アトムからできている? | 88 |
| | ロルの定理の意味は何か | 89 |
| | 平均値の定理の拡張版がテイラーの定理 | 91 |
| 2 | テイラーの定理と剰余項 | 93 |
| | 剰余項とは何か | 93 |
| | ロッシュ=シュレミルヒの剰余項 | 94 |
| 3 | テイラー展開とマクローリン展開 | 97 |
| | テイラーの定理を証明する | 97 |
| | テイラー展開とマクローリン展開 | 98 |
| | テイラー展開の意義とは何か | 100 |
| 4 | オイラーの公式 | 103 |
| | オイラーの公式が出てきた | 103 |
| | そして、オイラーの等式へ | 104 |
| | 対数関数とテイラー展開 | 105 |
| | 「学習は時間の関数」である | 109 |

5章 偏微分と重積分で多変数に対応する

| | |
|----------------------|-----|
| 1 多変数の物理現象を処理する偏微分 | 112 |
| 偏微分・全微分とは | 112 |
| 2変数の微分はどうか | 114 |
| 全微分の高階微分とは何か | 117 |
| 2 多重積分の意味と使い方は | 121 |
| 多重積分とは何か | 121 |
| 多重積分で注意すべきことは何か | 122 |
| 3 重積分で球の体積を求めてみる | 125 |
| 積分記号が3つ連なって「体積」を計算する | 125 |
| 極座標で表された体積素 | 126 |

6章 複素関数で虚数世界を探る

| | |
|-------------------------|-----|
| 1 複素数の掛け算で「点を回転」させる? | 132 |
| 複素数と物理学 | 132 |
| ホントに、5次以上では解の公式は存在しないか? | 133 |
| 複素共役と複素平面 | 134 |
| 複素数に i を掛けると、90度回転する | 136 |
| 2 複素関数を微分すると、どうなるか | 138 |
| 複素関数とは | 138 |
| 1回でも微分できれば、何回でも微分できる | 140 |

7章 複素積分を使って“難解積分”を解く

| | |
|-------------------------|-----|
| 1 複素積分と積分路 | 142 |
| 積分路とは何か | 142 |
| 閉曲線とグリーンの定理 | 143 |
| 単一閉曲線で積分するとゼロになる? | 145 |
| 2 複素積分の恩恵を調べる | 147 |
| うまく積分できないケースで活躍 | 147 |
| 微分が積分に変わるグルサの定理 | 148 |
| 3 ローラン展開はテイラー展開の複素数版 | 152 |
| 冪級数に展開する | 152 |
| ローラン展開とは | 155 |
| 4 留数はどう使えるか | 156 |
| 留数：複素積分が c_{-1} で表される | 156 |
| 留数の求め方 | 157 |

| | |
|------------------|-----|
| 5 特異点 | 159 |
| 特異点の種類 | 159 |
| 特異点を取り除く | 160 |
| 極でも、可除特異点でもない特異点 | 161 |

8章 ベクトルで古典力学を理解する

| | |
|---------------------|-----|
| 1 2つの量を同時に表現できるベクトル | 164 |
| 速さも力もベクトルで表せる | 164 |
| 内積をおさらいする | 165 |
| 外積を「トルク」で考えると | 167 |
| 2 直交座標のベクトル | 170 |
| ベクトルのおさらい | 170 |
| 外積のおさらい | 171 |
| 3 内積と外積 | 176 |
| 内積と外積の「積」 | 176 |

9章 線型代数が多変数処理に力を発揮

| | |
|---------------------|-----|
| 1 線型代数のおさらいをしよう | 180 |
| 嫌い? でも、強力ツールの「線型代数」 | 180 |
| 連立方程式を行列で解いてみる | 181 |
| 行列の掛け算、足し算 | 183 |
| 2 行列から生まれた「行列式」 | 186 |
| 逆行列の意味から考える | 186 |
| 3行3列のケースでは | 187 |
| 3 行列式を求めるサラスの方法 | 192 |
| 3行3列だけに成立するサラスの方法 | 192 |
| 簡単に逆行列を求める方法は? | 194 |
| 行列式は「数」である | 196 |
| 基本行列の操作 | 199 |

10章 ベクトル解析で「場」を理解する

| | |
|----------------------------|-----|
| 1 「勾配」とは、「場」の一番大きい変化と方向のこと | 204 |
| ベクトル解析の3本柱「勾配、発散、回転」 | 204 |
| ベクトル解析の本領 | 206 |
| 「勾配」=ナブラの意味は何か? | 208 |
| 2 「発散」とはベクトルの変化量のこと | 209 |
| 発散のイメージ | 209 |

| | |
|----------|-----|
| ガウスの発散定理 | 212 |
|----------|-----|

| | |
|------------------------|-----|
| 3 「場」の渦の中での「回転」 | 215 |
| トルクで「回転」を考える＝回転の考察(1) | 215 |
| ベクトル場の回転＝回転の考察(2) | 217 |
| ストークスの定理 | 221 |
| 連続の方程式 | 222 |

11章 量子力学の世界に踏み込むベクトル空間

| | |
|---------------------------------|-----|
| 1 別空間を次々に生み出すベクトル空間 | 226 |
| まずは、ベクトル空間を考えよう | 226 |
| 直交していないベクトルの場合 | 227 |
| 2 直交基底について調べておこう | 230 |
| ベクトルに関数の働きをさせるために | 230 |
| 単純化するために「基底を変換」する | 231 |
| 3 量子力学の理解に不可欠な「複素ベクトル空間」 | 233 |
| 複素数を要素に持つベクトル＝複素ベクトル | 233 |
| 基底を変換する | 234 |
| 演算子を変換する | 235 |
| 4 量子力学のための演算子 | 237 |
| エルミート行列なしに量子力学は構築できない | 237 |
| エルミート行列の固有値が実数になる | 240 |
| エルミート演算子の対角化 | 241 |

12章 波動関数はヒルベルト空間で表される

| | |
|------------------------------|-----|
| 1 波動関数で表される電子の動きを数学で | 246 |
| ヒルベルト空間と波動関数 | 246 |
| その名もブラ・ケット | 247 |
| 2 ヒルベルト空間は無限次元のベクトル空間 | 249 |
| 無限次元のベクトル空間 | 249 |
| どんな $f(x)$ に対しても、必ず級数が収束する | 250 |

13章 フーリエ変換で「波」の見方を変える

| | |
|-----------------------|-----|
| 1 再び、フーリエ変換の登場 | 254 |
| 数えられる無限、数えられない無限 | 254 |
| ディラックのデルタ関数の要件を満たすか | 256 |

| | |
|-----------------------|-----|
| 2 もう一つの要件を満たすか | 259 |
| 積分と極限を入れ替えてみる | 259 |
| ジョルダンの補助定理 | 261 |

14章 使える“特殊な微分方程式”

| | |
|-----------------------------|-----|
| 1 級数を使った微分方程式の解き方 | 266 |
| 新たな解法とは | 266 |
| 級数を使って解く「強力テクニック」 | 267 |
| 「解法のテクニック」の法則性を見つけよう | 268 |
| 2 既知の微分方程式に帰着させる | 271 |
| ルジャンドルの微分方程式 | 271 |
| 奇数項と偶数項に分けて考える | 272 |
| 3 重力や電場のポテンシャルを知るために | 278 |
| ロドリグの公式 | 278 |
| 重力や電場のポテンシャルに使う | 281 |
| ルジャンドルの多項式の直交性 | 283 |

15章 ガンマ関数と積分

| | |
|------------------------------|-----|
| 1 ガンマ関数は特殊関数の一つ | 288 |
| 階乗を「整数値から実数の範囲に」どう広げるか | 288 |
| ガンマ関数が階乗とどう関係するのか | 290 |
| 統計の正規分布の式と似ているぞ | 291 |
| 「論理」で押して、最後は「ひらめき」が | 293 |
| 2 速くよい近似値を示すスターリングの公式 | 296 |
| スターリングの公式の性質 | 296 |

16章 解析力学でニュートン力学をひもとくと

| | |
|--------------------------|-----|
| 1 ニュートン力学の2つの抽象化 | 300 |
| 使いやすくする抽象化、理論的な抽象化 | 300 |
| 球が一番速く転がり落ちる坂 | 301 |
| 2 「坂の問題」とオイラーの方程式 | 303 |
| 「坂の問題」の極大・極小を考える「停留値」 | 303 |
| オイラーの方程式で「坂の関数」を求める | 305 |
| 3 複雑な運動方程式で威力を発揮 | 307 |
| ラグランジュの運動方程式 | 307 |
| 二重振り子の問題 | 309 |

| | |
|--------------------|-----|
| 4 解析力学で「理論的抽象化」 | 311 |
| ハミルトンの運動方程式 | 311 |
| 新たな運動方程式を記述する | 312 |
| 力学的エネルギー保存の法則が出てきた | 314 |

付録

| | |
|---|-----|
| 付録1 微分の性質 | 320 |
| 付録2 ヤコビアンの説明 | 322 |
| 付録3 カルダノの公式 | 325 |
| 付録4 フェラーリ (Ferarri) の公式 | 328 |
| 付録5 $\varepsilon_{i\mu\nu}\varepsilon_{i\alpha\beta} = \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}$ | 330 |
| 付録6 ナブラの公式 | 332 |
| 付録7 「ジョルダンの補助定理」の証明 | 334 |
| 付録8 $(2k)!! = 2^k k!$, $(2k-1)!! = (2k)!/(2^k k!)$ の証明 | 336 |
| 付録9 「坂」問題 | 337 |

あとがき 339

さくいん 341

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

1章

微分で 物理現象をひもとくと

微積分は「物理数学の基礎」というより、「数学分野全般のかなめ」。これなしに数学なんて考えられない。

逆にいえば、あらゆる数学のエッセンスが取り込まれている微積分の考え方が理解できれば、他の分野の数学も容易に理解できる、ということだ。ニュートン、ライプニッツを初め数学者の偉業を思い浮かべながら、「^{かす}微かに分かる、分かった積もり……」なんていつてないで、ビシッと決めよう。

1

Δεν είναι τυχαιο νικη είναι προκαθορισμένο.

——偶然はない、勝利は決まっている——