
本書の読み方

本書の構成は以下になっています。

構成は基本的に最初ほど易しく、だんだん難しい内容になるようにしています。どこかでわからなくなったとしても、それまでの知識で十分役に立つように配慮しています。読んだ分だけ得るものはあると思いますので、安心して読み進めてください。

また、「微分は傾きを求めること」など、重要なことはくどいほど何回も繰り返しています。理解している人にはしつこく感じるかもしれませんが、初学者にはこのくどさが理解の助けになると信じています。

本書は7章構成になっており、以下に各章の狙いを記します。

第1章 微積分はこんな視点を与えてくれる

➡お金の管理や自動車など、身の回りで微積分が使われている実例を示しています。

(数式は使っていません)

第2章 微積分とは何なのか？

➡小学校で勉強する速さと時間と距離の関係から、微積分の意味を説明します。ここが理解できれば、微積分が何かは理解できると思います。

(数式は使っていません)

第3章 なぜ数式を使うのか？

➡2章まで微積分が何なのか理解した後で、微積分を数式で表現する理由について説明します。数式を使うメリットを理解できるでしょう。

第4章 数学の世界での微積分

→高校の微積分の全体像を示します。ここでは全体像を示すだけで、「なぜ」には触れていません。まず、微積分の「森」を見ることに集中してください。

第5章 無限の力で微積分は完璧になる

→4章で説明した微積分の全体像がなぜ成り立つのか、数学的な背景について示します。なるべくわかりやすく書いていますが、4章までの内容でも微積分の計算はできるようになっていますので、わからなくても気にする必要はありません。

第6章 微分方程式で未来が予測できる

→「未来を予測する」微分方程式について、数学的に突っ込んだ説明をします。本書の中では比較的高度な内容になっています。

第7章 微積分のその他のトピックス

→指数関数や三角関数の微積分、積分のテクニックなど、微積分の全体像を示すためには不要だけれども、微積分の学習としては重要な項目をまとめました。

本書は次の3つのタイプの読者を想定しています。それぞれの方について、本書をどのように読めばよいのかお伝えしておきたいと思います。

①微積分と言われても全く何なのかわからない方、「微積分」が何なのか知りたくて本書を手にとられた方

②数学の授業をより理解する目的で、予習・復習・教科書の補助教材として手にとられた学生の方

③数学をより深く理解したい数学が得意な方、または数学をわかりやす

く伝えたくて手にとられた数学の教員の方

①微積分と言われても全く何なのかわからない方、「微積分」が何なのか知りたくて本書を手にとられた方へ

あなたはもしかすると数式が得意ではないのかもしれませんが。でも安心してください。この本の1章と2章は、数式を使わずに書いています。これを読むだけでも、微積分がどのような考え方なのか、微積分が世の中でどのように役立っているのかがわかるはずです。

そして、できれば3章にもチャレンジしてもらえると完璧です。ここまでわかれば、数式が使えなくても微積分が理解できたと言えると思います。

もちろん興味がわけば、4章以降の数式を使った微積分にもチャレンジしてみてください。そこには数学の深い世界が広がっています。

この本を読んだゴールとして、実は「変化」や「累積」を見ることが微積分の考え方であること、「はじき」（速さと時間と距離）の関係の中に微積分の本質があること、数式は嫌われがちだけれども役にも立つことの理解を到達点にしましょう。

自分達も微積分の考え方を使っているのだ、と思えば微積分も身近に考えられるようになると思います。数式だらけの暗号のような微積分だけが、微積分ではありません。

②数学の授業をより理解する目的で、予習や復習、教科書の補助教材として手にとられた学生の方へ

あなたは多分、ある関数を微分する問題があったら微分することはできるでしょう。そして面積を求める積分の問題があったら、計算することもできるでしょう。しかし、その計算に何の意味があるのかかわらずに、モヤモヤしているのではないかと思います。

そんなあなたは1章と2章をさっと読んだ後に、3章をしっかりと読んでください。ここには数式が存在する意味が書かれています。ここが理解でき

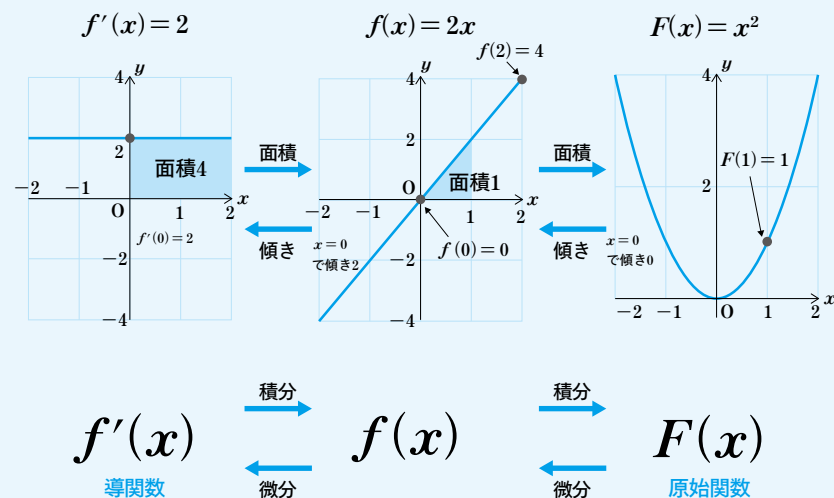
ると、関数とはどのようなものなのか、なぜ数式のような面倒に思えるものが存在しているかがわかるでしょう。

そして4章がハイライトです。4－5節の「微積分の構造」を理解できれば、今までバラバラだった微分や積分の関係が、一気に整理されて頭に入ることをお約束します。

5章、6章はやや難しいかもしれませんが、これを理解しておくと極限や微分方程式といった、微積分の核となる部分に触れられます。また7章は微積分の構造を示すという本書の本流からは外れますが、特に理工系の道に進む方には必須の項目です。

微積分の構造

※本文116ページに出てきます。



書では徹底的に具体的にすることにこだわりました。もし、他に微積分を具体的に手段など考えられましたら、ご教授いただけますと嬉しいです。

また、数学教育に携わる方に向けてお伝えしたいことは、微積分が難しく感じられる理由の一つは、学ぶ順序ではないかということです。教科書では極限→微分→積分の順に教えられます。しかしこれでは難解な微分の定義で学生が疲れ果てて、学ぶ意欲をなくしてしまうのではないのでしょうか？

だから本書では、積分は面積を求めること、微分は傾きを求めることという微積分の役割を最初に示しました。その後、計算方法を解説し、最後に微積分の定義について説明するという逆の順番にしています。

個人的にはこの順番が初学者にとって一番理解しやすいのではないかと考えています。もしご意見があれば、ご連絡いただけますと幸いです。

③数学をより深く理解したい数学が得意な方、または数学をわかりやすく伝えたくて手に取られた数学の教員の方

「はじめに」で説明した通り、私は数学を使うエンジニアであって、数学の専門家ではありません。そのため、数学的には厳密でなかったり、乱暴だったりする部分も目につくかもしれません。しかし、そんな数学観もあるのだと、楽しんでいただけますと幸いです。

数学が難しいのはその抽象性の高さにあると考えています。ですから本

3-1

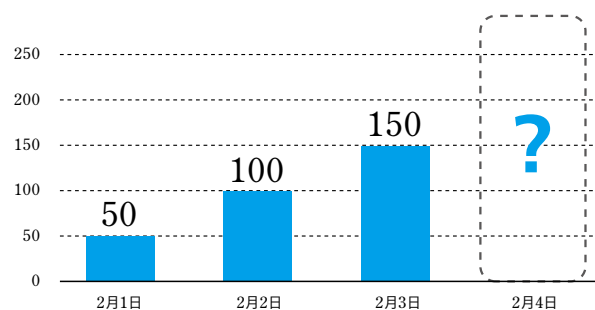
未来を予測するために
数式を使う

「なぜ数式を使うのか？」という答えは、「未来を予測するため」、あるいは「見えないモノを見るため」と言えるでしょう。

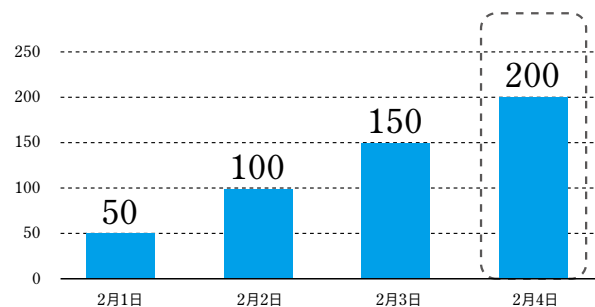
例えば、次のようなグラフがあったとします。

この数字の意味はなくてもよいのですが、意味がない数字を見るのが気持ち悪いという方もいるかもしれません。だから、あるお店の1日の入店者数とでも考えてみてください。

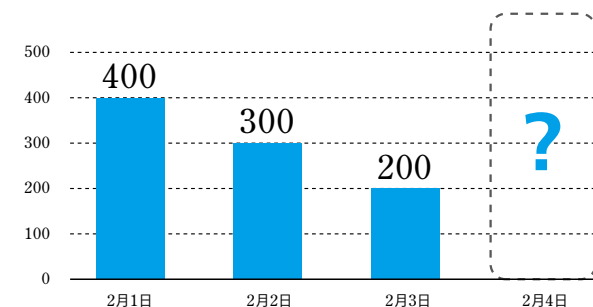
この時、2月4日の数値はどのくらいになりそうでしょうか？



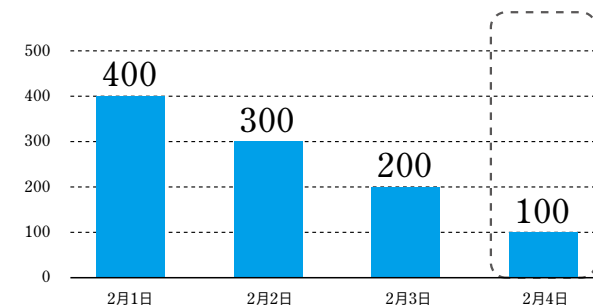
おそらく、このように200くらいになると予想されたのではないのでしょうか？



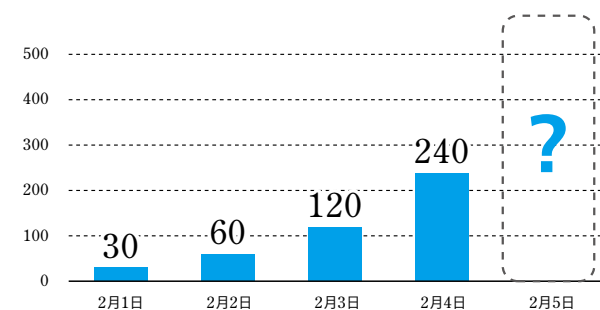
それでは、こちらはどうか？



この場合は100と予想されたのではないのでしょうか。

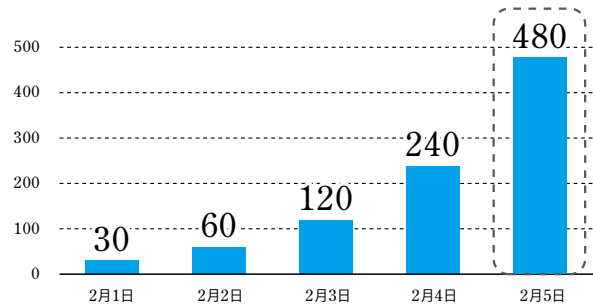


それでは最後です。この時に2月5日の数字はどうなりそうでしょうか？



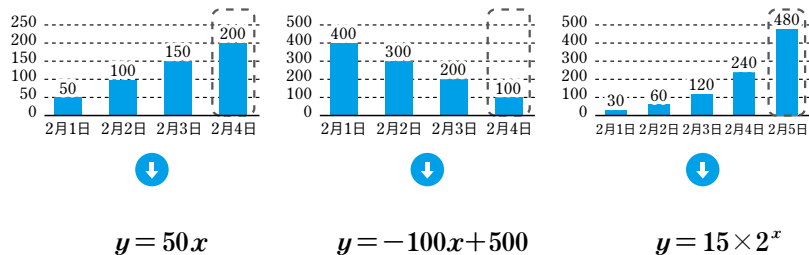
これは少し考えた方もいるかもしれませんが、多くの方が480と答えて

くれると思います。



数式というと、みんなから嫌われがちではあります。でも、この問題を解いた人は数式の考え方をしていると言えます。

最初の図では数字が50ずつ増えています。これは1次関数で $y = 50x$ と表されます。次の図では数字が100ずつ減っていたので、 $y = -100x + 500$ と表されます。そして、最後の図では数字が倍々に増えていたので $y = 15 \times 2^x$ と表せるわけです。



人間が目で見ても、なんとなく予測するというのであれば、数式なしでもこのような予測が感覚的に可能かもしれません。しかし、人間の直感では間違えることもあるし、なにより人手がかかります。

だから、この予測をコンピュータに任せようとするわけです。ただし、その時には必ず数式で表現する必要があります。なぜなら、コンピュータ

には感覚はなく、数式で表現されたものしか理解できないからです。

ビジネス的な問題であれ、生物的な問題であれ、もちろん工学的な問題であっても、数字を分析する時には、過去の数字を分析して、未来を予測したいという目的があると思います。

そのためには数字を分析して、数式にする必要があるわけです。

中学や高校で1次関数、2次関数、指数関数、三角関数などいろいろな数式を勉強したと思います。それらの数式は現実の数字をその数式に当てはめて、未来を予測するために存在していると言えるのです。

3-2

関数とは何か？

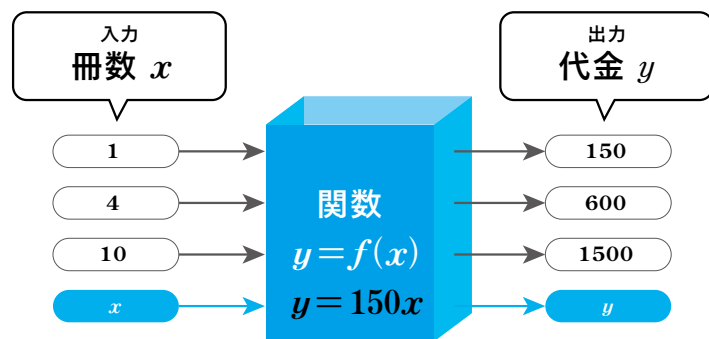
さあ、「未来を予測する」ために、「見えないものを見る」ために、数式について学びましょう。まずは関数について説明します。

関数とは「入力」の数字を入れた時に、「出力」の数字が出てくる箱のようなものです。

例えば、150円のノートを買った冊数を x 冊買ったときの代金を y 円とします。これは1冊のノートを買ったとき、つまり $x=1$ の時は150円ですし、2冊のノートを買ったとき、つまり $x=2$ の時は300円となります。

このようにある x 、つまりノートを買った冊数を定めると、代金が出てきます。このようなものを関数と言います。

下の図のように数字を入れると数字が出てくる箱のようなものと考えてください。



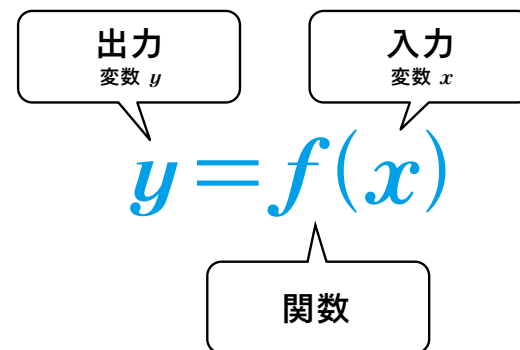
この時、ノートを買った冊数を x 冊買ったときの代金 y は $(150 \times x)$ 円、文字の式では「 $\times$ 」を省略することが普通ですので $150x$ 円となります。ですから、このノートを買った冊数と代金の関係は $y = 150x$ と表されるわけです。だんだん学校で習った数学に近づいてきましたね。

ここで押さえておいてほしいことがあります。ちょっと教科書的になり

ますが、大事なところなので、しっかり押さえてください。

それは変数、関数、定数です。

先ほどのノートを買った冊数と合計金額の関係を数学の言葉で書き直してみました。 x と y と $f(x)$ という文字が登場していますね。



このなかで x と y は「変数」です。というのも、 x は買うノートの冊数なので、変化する数です。そして、 y は合計金額なので、 x が変わると変化します。だから y も変数なのです。

つぎに $f(x)$ という文字です。これは「関数」を意味しています。 f は英語でいうfunction、つまり関数の頭文字をとったものです。この場合、 $f(x)$ は“ $150x$ ”という式を表します。この場合、 $y = 150x$ と $y = f(x)$ という表現は、同じことを意味しているのです。

ちなみに関数が1つだと $f(x)$ が使われることが多いですが、状況によっては2つ以上の関数が登場することもあります。その場合 f の次の g 、 h を使って、 $g(x)$ 、 $h(x)$ などとする人が多いですね。

そして $f(x)$ のかっこの中の x は、その関数の変数を表しています。ノートの例の場合 $150x$ という式の x が変数ですよ、ということを意味しているわけです。

そして $f(1)$ とか $f(3)$ とか x のところに数字が入ったものも現れます。これは、例えば $f(1)$ であれば変数 x が1の時の関数の値を表します。つまり、 $f(1) = 150 \times 1 = 150$ ですし、 $f(3) = 150 \times 3 = 450$ となるわけですね。

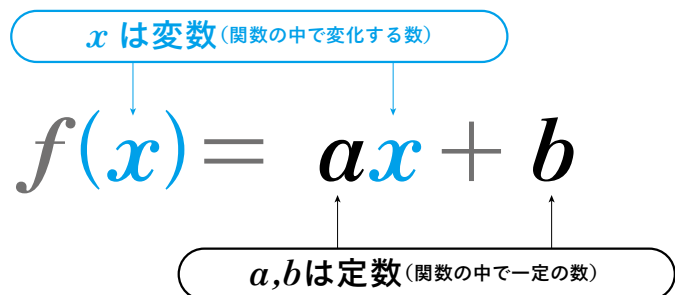
ちなみに変数には x や y や z といったアルファベットの最後の方の文字が使われることが多いです。その他に t が使われることが多くあります。この t はtimeつまり時間の頭文字で、時間を変数とした関数を考える時に使われやすいということです。

最後に「定数」です。これは少しややこしいので、もしこの部分を読んでもわからなくても先に進んでもらって大丈夫です。

学校の教科書では、よく " $f(x) = ax + b$ " のような表現が見られます。先ほどお伝えした通り $f(x)$ は x を変数とした関数です。しかし、この $ax + b$ という式の中には x 以外の文字、 a と b も含まれています。この a と b は何なのでしょう？

じつはこれが定数と呼ばれるものです。 a や b は文字なので色々な数字が入ります。しかし変数ではありません。先ほどのノートを買った冊数と合計金額の例だとノート1冊の金額が a にあたります。今回はノートが1冊150円という設定でしたが、別に200円や300円のこともあり得ます。だから、そのノート1冊の値段を a とおいているわけです。

しかし、この a は定数なので、関数の式の中では固定したものと考えます。つまり、 $f(x) = ax + b$ の時、 $f(2) = 2a + b$ となりますが、この " $2a + b$ " は150とか300といった数字に近い扱いとなるのです。ここは数学の教科書を読んでいてわかりにくいところなので気をつけてください。



一般的に変数は x で始まり、 y や z 、そして定数は a から始まり、 b や c が使われていることが多いです。

最後に、関数というと数式をイメージするかもしれませんが、これは別に数式でなくても構いません。例えば、A君が家を出てから経過した時間 t (秒) と進んだ距離 x (m) を関数として $x = f(t)$ としてもよいのです。この場合 $f(t)$ は $f(t) = 10t$ などと、明確な式で表すことはできないでしょう。でも、これも立派な関数なのです。

関数の要件はある変数の値に対し、出力される値が1つ存在することです。この場合だと例えば10秒後には家から8m離れたところにいた、など明確に1つの数字が対応しますから、これも関数でよいのです。

ちなみに関数という言葉は数学以外でも登場します。

例えばエクセルで関数を使っている人もいるでしょう。この関数も基本的に与えられた数字 (変数) に対して、ある数字を返すものです。また、プログラミングでも関数という概念が登場しますが、これも同じです。ある入力に対して、ある出力を得られるもの、ということになります。

このように関数の概念をしっかりと学んでおくと、数学以外の分野でも役立ちます。ぜひしっかりと覚えておいてください。