

微分・積分の意味がわかると、数学がさらに好きになる ……3  
——「はしがき」に代えて——

## 第0章 微分・積分のイメージをつかむ

- 1 「微分＝虫の目」で眺めてみる ……14  
曲線をどんどん拡大していくと／「微分できない」こともある？
- 2 曲線で囲まれた面積を考える「積分」……17  
ナイル川の氾濫が積分発祥のきっかけ？
- 3 微分と積分の関係は？ ……20  
クルマの「走行距離・速度」を考えてみよう／「移動距離→速度→加速度」の関係／さまざまな情報が1本のグラフから得られる！
- 4 開花時期の予想と積分……25
- 5 砲弾の軌跡と台風の進路 ……27  
微分は戦争とともに発展した？／微分・積分の応用は幅広く、楽しい

## 第1章 $x^n$ の微分がすべての基本！

- 1 「距離、速度、加速度」が「微積」をつなぐ……32
- 2  $f(x) = c$  の微分は？ ……36

- 3 1次式 $f(x) = x$ の微分は？ ……38
- 4 2次式 $f(x) = x^2$ の微分は？ ……41  
曲線に接線を引いてみる／2次関数の「微分の法則性」を知りたい……
- 5 3次式 $f(x) = x^3$ の微分は？ ……45  
3次関数を微分の定義から考える
- 6  $x^n$ を微分すると ……48
- 7  $(x^n)' = nx^{n-1}$ を証明する……50  
パスカルの三角形と二項定理／ルート（平方根）の微分は？
- 8  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を微分する ……55

**コラム** ニュートン、ライプニッツ……微分記号の違いは？

## 第2章 $\sin$ と $\cos$ 、対数を微分する

- 1  $\sin$ を微分すると、何になる？ ……60  
サインカーブを描いて考えると……／ $\cos$ を微分する／三角関数の微分の法則性が見えてきた／人工衛星の速度は三角関数の微分で……
- 2  $(\sin)' = \cos$ となる証明……67  
「 $\sin$ の微分→ $\cos$ 」を証明する／「 $\cos$ の微分→ $-\sin$ 」を証明する
- 3 指数を微分すると、どうなる？ ……71  
ネイピア数 $e$ と自然対数／指数を微分すると、どんなグラフになるのか？
- 4 不思議の国の「 $e$ 」……76

$e$ の定義/シャイロックの末裔の秘策とは？

- 5 対数  $\log$  を微分するには ..... 79  
対数は指数の逆バージョン/対数の微分公式の証明
- 6 指数・対数の微分は何の役に立つ？ ..... 84  
指数・対数を微分して化石の年代測定？

### 第3章 「極値」を究めよう！

- 1 グラフは増加・減少の連続だ ..... 88  
「区間」によってグラフの傾向が変わる/「増減無し」の地点を探せ
- 2 増減表とはどういうもの？ ..... 91  
グラフの増減は「接線の傾き」と一致/増減表は「コブの位置」を見つける道具
- 3 増減表でグラフの形を調べる ..... 96  
「増減無し」の点を探すことから始める
- 4 極大値・極小値を求める ..... 103
- 5 最大値・最小値では、端点に注意 ..... 106  
「極値」とはどう違うのか？/いよいよ最大値・最小値を求めてみる
- 6 最大値・最小値トレーニング ..... 111  
最大値・最小値は「習うより慣れよ」/デフォルメ・グラフでわかりやすく

### 第4章 微分の応用問題にチャレンジ！

- 1 落下の法則をグラフにする ..... 116  
ガリレオの実験と微分/真上に投げると……
- 2 ブリキの板で最大の箱をつくる ..... 120  
少ない材料で最大のものを/切り取る部分を変えると
- 3 三角の箱の最大容量は？ ..... 125
- 4 球の中の円錐を最大にする ..... 128
- 5 3次関数が3実根をもつ問題 ..... 130

### 第5章 積分だからできる面積計算

- 1 マス目で面積に接近してみる ..... 136  
両側から接近するアルキメデスのアイデア
- 2 積分とは「微分の逆操作」 ..... 139
- 3 インテグラルの意味と不定積分 ..... 145
- 4 範囲が定まっている定積分 ..... 150
- 5  $x$ 軸より下にある面積の計算法は？ ..... 155
- 6 2つの関数  $f(x), g(x)$  で囲まれた面積 ..... 158  
ミスしない積分の計算法

**コラム** 古代エジプト人は、円の面積を正方形に置き換えた？

## 第6章 ドーナツ型からカバリエリまで

- 1 体積は薄片を集めたもの ..... 166  
1ミリ幅のシリコンウエハ／体積は薄く切った面積の集まり？  
**コラム** 加速度の加速度は「加々速度」
- 2  $x$ 軸に沿った回転体をつくる ..... 171  
回転体は積分の定番／円錐、円柱の体積
- 3  $y$ 軸に沿った回転体をつくる ..... 175
- 4 ドーナツ型の体積を測る ..... 179  
円を回転させてドーナツ型をつくる／2つの回転体の引き算で／発想を変えてドーナツ型の体積を考える
- 5 パップス・ギュルダンの定理 ..... 184
- 6 地球の体積を考える ..... 186  
まず、断面積を求めることから／積分を使わずに、積分発想だけで考える
- 7 カバリエリの原理は万能の積分ツール ..... 190  
面積、体積に役立つカバリエリの原理／長さが2倍のとき、面積は？
- 8 カバリエリの原理で球の体積を求める ..... 194  
アルキメデスお気に入りの「球：円柱」の比

## 第7章 微積に自信！ 4つの計算法則

- 1 「積の微分」という方法 ..... 198  
使い勝手のいい「積の微分」／「商の微分」とは

- 2 「合成関数の微分」という方法 ..... 201  
ややこしい関数は「合成関数の微分」で対応／少しレベルの高い計算もラクラク
- 3 「置換積分」という方法 ..... 206  
展開せずに積分する／一見、むずかしそうだが……
- 4 定積分での置換積分は「範囲」に要注意 ..... 211  
区間の変更を忘れない！
- 5 円の面積公式を置換積分で ..... 214  
円の面積 =  $\pi r^2$  はホント？
- 6 「部分積分」という方法 ..... 218  
積分しにくいものを扱う／ $\log_e x$  を積分する法

## 第8章 ニュートン近似が好きになる

- 1 シンプルな台形近似の方法 ..... 224
- 2 台形近似よりよい近似のシンプソンの公式 ..... 226  
2次曲線で面積に接近する／ $\pi$ の近似値を出す
- 3 ニュートン法で近似する ..... 232  
微分を使って $\sqrt{5}$ や $\sqrt[3]{5}$ を近似計算する／繰り返して近似していく
- 4 ニュートン法の一般式 ..... 238  
ニュートン法の一般式を求める
- 5 表計算ソフトでニュートン法 ..... 241
- 6 70を利率で割ると ..... 244

$\log(1+x) \doteq x$ となる？

## 第9章 微分方程式を楽しもう！

1 「流れ」を予測する .....	250
2 静止衛星の速度を求める .....	252
位置を微分→速度、速度を微分→加速度／遠心力と重力加速度がバランスする！／微分方程式で知的世界が広がる	
3 ケプラーの第3法則を求める .....	257
4 化石の年代測定と微分 .....	259
放射性元素の半減期／微分方程式を立てて解く	
さくいん (Index) .....	262