01 約数・公約数・最大公約数(gcd)

それぞれの違いと目的を知ろう

約数とは、ある整数(N)を割り切る整数のことをいいます。

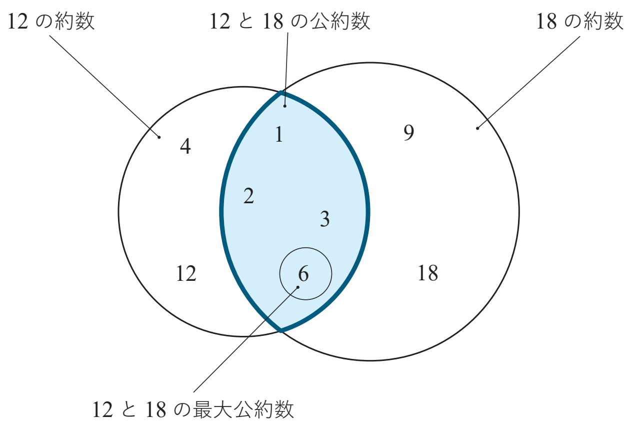
例えば、10は2で割ると「10 ÷ 2 = 5」と割り切れるので、2は10の約数です。しかし、10は3で割ると「10 ÷ 3 = 3余り1」と割り切れないので、3は10の約数ではありません。

約数は、正の数(自然数)だけではなく負の数もありますが、正の数(自然数)に限定することが多いです。

例えば、4の約数は4を割り切る整数なので、本来、1、2、4、−1、−2、−4の6つありますが、通常は正の数1、2、4だけにします。そのため本書も、約数は正の数(自然数)で考えていきます。

それでは、12と18の約数とその個数を求めてみましょう。

12の約数は、1、2、3、4、6、12の6つです。
18の約数は、1、2、3、6、9、18の6つです。



12と18の約数に注目すると、1、2、3、6が共通しています。このように、2つ以上の自然数に共通している約数を**公約数**といい、公約数のなかで最大のもの(12と18の場合は6)を**最大公約数**(gcd:greatest common divisor)といいます。

aとbの最大公約数を、gcd(a, b)と表します。12と18の最大公約数6を記号で表すとgcd(12, 18) = 6です。

最大公約数は次のような「すだれ算」を用いることで簡単に求めることができます。36と54の最大公約数を求めてみましょう。

まず、2つの数字を横に並べます　　36　54

▼

36と54のどちらも割ることができる最小の数字2と「)」を左に書きます。

$$2\,\underline{)\ 36\quad 54}$$

▼

実際に割ります。

$$\begin{array}{r} 2\,\underline{)\ 36\quad 54} \\ 18\quad 27 \end{array}$$

▼

割れなくなるまで何回も割ります。共通に割れる数がなくなったら、今まで割ってきた数をかけることで最大公約数を求めることができます。

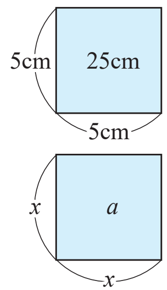
$$\begin{array}{r} 2\,\underline{)\ 36\quad 54} \\ 3\,\underline{)\ 18\quad 27} \\ 3\,\underline{)\ \ 6\quad\ \ 9} \\ 2\quad\ \ 3 \end{array}$$

よって、36と54の最大公約数は　2 × 3 × 3 = 18
記号で表すと、gcd(36,54) = 18です。

なお、2つ以上の整数に共通する倍数を**公倍数**といい、公倍数のなかで最小の自然数を**最小公倍数**といいます。最小公倍数は、先ほどのすだれ算で求めた数をL字型にかけ算することで求めることができます。36と54の最小公倍数は、2と3と3と2と3をかけ算して108となります。

01 平方根の定義

平方根の定義でよく忘れてしまうもの



一辺の長さが5cmの正方形の面積は、$5^2 = 25\text{cm}^2$です。cm^2を平方cmといい、平方は2乗を表す言葉です。

ある数xを2乗するとaになるとき、つまり$x^2 = a$のとき、xをaの**平方根**(square root)といいます。

平方根は2つあり、正の平方根を$x = \sqrt{a}$、負の平方根を$x = -\sqrt{a}$と表します。$\sqrt{\ }$を**根号**または**ルート**(root)といいます。なお、$\sqrt{\ }$の記号は、rootの頭文字rを変形させたものが由来とされています。

$5^2 = 25$、$(-5)^2 = 25$より、5も−5も2乗すると25となるので、25の平方根は5と−5となります。

数学の定義は厳密であるため、混同してしまうものが多々あります。

例えば、「36の平方根」と「$\sqrt{36}$」です。

「36の平方根」といえば、6と−6の2つで、$\sqrt{36}$は6だけですが、学習の初期段階では$\sqrt{36} = \pm 6$と間違えてしまうことがあります。これは「平方根」と「正の平方根の計算(ルートを外す計算)」を混同してしまった例ですが、平方根を学習した初期段階ではよく起こります。

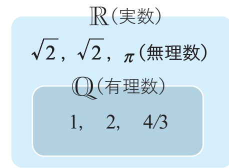
36の平方根は、正の平方根$\sqrt{36}$と負の平方根$-\sqrt{36}$の2つあります。しかし、このままで答えにするわけにはいきません。なぜなら、$\sqrt{36}$はルートを用いない簡易な6という表現があるからです。そのため$\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$という計算を行ない、36の平方根が$\sqrt{36} = 6$と$\sqrt{36} = -6$とするのですが、それを混同して$\sqrt{36} = \pm 6$としてしまうのです。

$\sqrt{36} = \pm 6$と間違えないように、平方根の定義を押さえることも大事ですが、「計算に使える形」で頭に入れておくことも大切です。

$\sqrt{a}$はaの正の平方根ですから、2乗したときaになる正の数と押さえておくと、先述のような間違いがなくなります。

ここで、平方根の用語を分析してみましょう。平方根の英語square rootのsquareは、正方形や2乗という意味があります。正方形の面積は、一辺の長さを正の数xで表すと、$x \times x = x^2$から、squareは2乗に関係する言葉とわかります。

rootは根(こん)という意味の他に、根元など「元」を表わすものですから、square rootは正方形の元となる数と考えられます。例えば、面積2の正方形の元となるものを考えると、一辺の長さに該当しそうです。



この正方形の一辺の長さ$\sqrt{2}$は、分数では表せない無理数でした。無理数の証明には、背理法を用います。証明を見てみましょう。

背理法なので、$\sqrt{2}$:無理数を否定して、$\sqrt{2}$を有理数と仮定します。$\sqrt{2}$は正の有理数より、m、nを自然数かつ互いに素$\gcd(m, n) = 1$とすると、次のように表すことができます。

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

分母を払うため、両辺をn倍して、2乗すると、

$$2n^2 = m^2$$

左辺が偶数なので、右辺も偶数ですから、$m = 2M$と表せます。

代入すると、

$$2n^2 = (2M)^2 \Leftrightarrow 2n^2 = 4M^2 \Leftrightarrow n^2 = 2M^2$$

今度は、右辺が偶数となるので、左辺のnも偶数となるので、$n = 2N$と表せます。すると、$n = 2N$、$m = 2M$となるので、m、nが互いに素、つまり$\gcd(m, n) = 1$に反します($\gcd(m, n) = \gcd(2M, 2N) = 2$となる)。

よって、$\sqrt{2}$は有理数ではないので、無理数と示すことができます。

01 定義·定理·公式·命題

数学で重要な用語の違いを押さえよう

私が受験生だった1999年、東京大学は今なお歴史に残る次の問題を出題しました。

(1)　一般角θに対して$\sin\theta$, $\cos\theta$ の定義を述べよ。
(2)　(1)で述べた定義にもとづき、一般角α, βに対して

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。

(1)は三角関数の定義、(2)は加法定理の証明問題です。ひねった問題ではなく、教科書に必ず掲載してあるようなストレートな問題ですが、正解率はさほどよくなかったようです。

解答は第5章の加法定理(144ページ)で紹介します。この問題を通して、多くの受験生は定義や定理をきちんと理解していないのではないか？ というのが話題になりました。

振り返ると、私たちは小中高で**定義**や**定理**という言葉を耳にしますが、何のことかわからずに問題演習を行なってきた人も多いのではないでしょうか？ ここではそんな用語の説明をしていきます。

まずこれらの用語は、ルールとして定めるもの・仮定するものと、証明するものに分かれます。

定める・仮定する	証明する
定義、公理	定理、補題、系、公式、命題

では、定めるものからお話ししましょう。

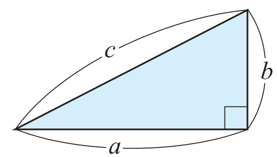
定義　用語の意味を述べたもので、ルールや決まり事のことです。

1章で紹介した円周率は、(円周の長さ)÷(直径)というのが定義です。他に、2で割り切れる整数を偶数、2で割り切れない(2で割ると1余る)整数を奇数といいますが、これも定義の例です。

公理　理由を問わず正しいと認めるものを公理といいます。理論の前提となる仮定や、証明することなく正しいと考えるものととらえてもよいでしょう。例えば、どんなに大きい自然数nであっても、その数の「次の」自然数$n+1$が存在します。これは公理です。

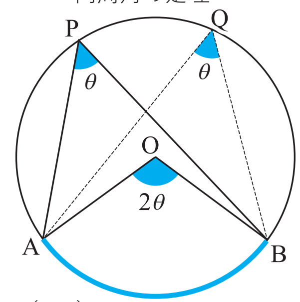
定理　公理から導き出され、定義された言葉のみで構成され、正しいことが証明できる文章を定理といいます。冒頭で紹介した加法定理の他に、ピタゴラス(三平方)の定理、円周角の定理などがあります。

ピタゴラスの定理



$a^2+b^2=c^2$が成り立つ

円周角の定理



1つの弧(AB)に対する円周角は一定　$\angle P=\angle Q(=\theta)$

1つの弧(AB)に対する中心角は、円周角の2倍　$\angle O=2\times\angle P$

なお、証明が終わったら「証明終わり」と書けばよいのですが、短縮して書きたい場合もあります。そのときは、証明終了を示す短縮形として「Q.E.D.」、記号として□や■などと書きます。

「**Q. E. D.**」はラテン語のQuod Erat Demonstrandum（かく示された）が由来となっていて、証明を初めて明確に行なったユークリッドが、自書の『原論』で使用していたことから広まりました。

01 xy平面(デカルト平面)

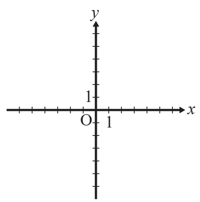
画期的なアイディアは虫がもたらした

「20歳を迎える前にあなたは亡くなります」
と、医師から診断されたら、あなたはどうしますか？

私ならオドオドしてしまいそうですが、病弱な身体を最大限に生かすのみならず、医師の診断を覆し、歴史に名を刻んだ人物がいます。それが今回紹介する「**xy平面**」を創り出したルネ・デカルトです。

デカルトは近代哲学の基礎を築いた人物で、著書『方法序説』にある「我思う故に我あり」や「困難は分割せよ」という言葉のイメージが強いかもしれません。そのためデカルトは数学者なの？ と思った方もいるかもしれませんが、哲学の分野のみならず数学の分野でも多大な成果をあげています。デカルトのあげた数学の有名な成果といえば、**座標平面**(xy平面)です。

皆さんは中学生の頃、1次関数、2次関数などを習い、x軸、y軸を引いてグラフを描いたと思います。デカルトは、グラフを描く際に利用する座標平面を生み出したのです。

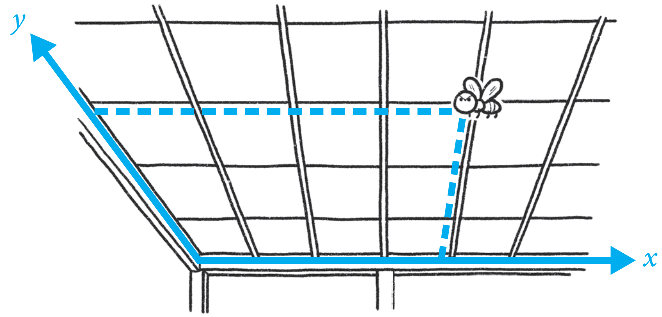


もしかすると中学生の頃、xy平面を習い計算ばかりさせられた嫌な記憶がある方もいるかもしれませんが、この座標平面を用いると、数式を視覚化することが可能となり、図形の問題をセンスではなく計算で解くこともできるようになるのです。特に図形の問題で補助線を引くときなどは、しっくりしないこと・理解が難しいことが多々ありますが、そんな図形問題も、座標平面を使えば形式的な計算で求めることもできるのです。

かつてユークリッドは「幾何学に王道なし」、つまり図形に関する問題を簡単に解く方法はないと言いましたが、座標平面を使った解き方は、幾何学の王道になるのです。座標平面を活用する具体例のひとつに、話題になった東京大学の問題があります(26ページ)。

そんな幾何学の王道を示した座標平面のアイディアを、デカルトはどうやって思いついたのかというと……何と「虫」です。

ある日デカルトが横になって寝ていて、目が覚めたとき天井に虫がいたそうです。この虫がいた位置を友人にどう伝えようとデカルトは思いめぐらせ、端から右に4、上に3の位置に虫がいると伝えればわかりやすいのではと考えたそうです。

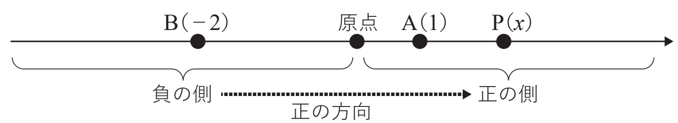


目が覚めて思いめぐらせたことが、後に数学を大きく変えるアイディアになったのです。それでは、数直線上の座標から見ていきましょう。

実数0に対応する点を**原点**といい、点Oで表します。一つの直線上に点Oをとり、Oを境に2つの部分に分けて、1つを正の部分、もう1つを負の部分として、負の部分から正の部分に向かう方向を正の方向とします。

次に、直線上に点Pをとって、1つの実数xを対応させるとき、xをPの座標といい、P(x)と表します。点(1)をA、点(−2)をBとする場合は、A(1)、B(−2)となります。

また、このように直線上に数を対応させて表すとき、この直線を**数直線**といいます。座標の入った数直線を**座標軸**といいます。



01 虚数・純虚数と複素数

似ている用語がある理由

具体的な問題から見ていきます。まず$x^2+x+1=0$の解を考えます。

因数分解が困難なので、**解の公式**を利用しましょう。

［解の公式］　$ax^2+bx+c=0$　のとき、　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

でした。$a=1, b=1, c=1$とすれば、

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times1}}{2\times1}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\quad\cdots①$$

となります。$\sqrt{a}$は、2乗してaになる正の数でしたが、どんな実数も2乗すれば正の数になるので、2乗して-3となる実数$\sqrt{-3}$は存在しません。そこで、存在しないのであれば創ればよいと考えられたのが**虚数単位**(imaginary unit)iで、2乗して-1となる数をi、つまり、

$$i^2=-1,\quad\sqrt{-1}=i$$

と定めます。2乗して-1となる数は$-\sqrt{-1}$もあるため、$-\sqrt{-1}=i$と定めても構いませんが、多くの場合は$\sqrt{-1}=i$とします。

数学では虚数単位をiで表しますが、工学ではiを電流で使用するので、jやkなども用います。

ここで、$\sqrt{-3}$は$\sqrt{-1}$の$\sqrt{3}$倍なので、$\sqrt{-3}=\sqrt{3}\,i$と、iを使って表すことができます。先ほどの2次方程式の解①は虚数単位iを使って表すと、

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

となります。この解のように虚数単位iを含んだ数を**虚数**(imaginary number)といい、$\sqrt{3}\,i$のように実数部分を含まず虚数単位のみを含んだ数を**純虚数**といいます。

虚数、純虚数、実数を全部合わせて**複素数**(Complex Number)といい、複素数全体の集合は$\mathbb{C}$で表します。複素数は$a+bi$の形で、$a=0$のときが純虚数、$b=0$のときが実数となります。なお、解の公式で得られた2解

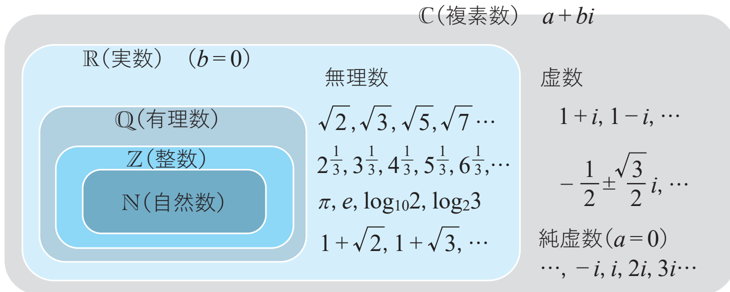
$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　と　$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　の関係を**共役**(Conjecture)といい、

$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　の共役複素数は　$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$、

記号では$\overline{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$と表します。

また、$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　の共役複素数は　$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$、

記号では$\overline{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$　と表します。



［共役複素数］　複素数$a+bi$の共役複素数は$a-bi$、$\overline{a+b_i}=a-bi$
　　　　　　　複素数$a-bi$の共役複素数は$a+bi$、$\overline{a-b_i}=a+bi$

虚数、純虚数、複素数と似たような言葉があり混乱しそうになりますが、これには事情があります。虚数単位iを含む問題の多くは「複素数を求めなさい」となっていますが、これを「虚数を求めなさい」にしてしまうと困ったことが起こるのです。例えば、$x^2-(1+i)x+i=0$の解は$(x-1)(x-i)=0$より、$x=1$、$x=i$となりますが、虚数解を求めなさいと問うと、解は$x=i$だけになってしまいます。そのため、複素数という用語が必要になるのです。

01 確率にまつわる用語

サイコロ·コインを通して用語を押さえる

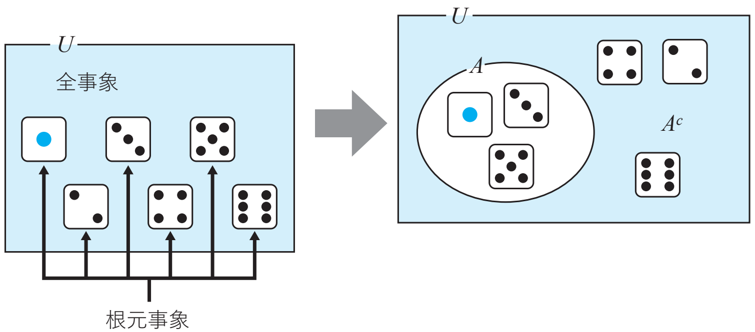
確率の用語は、統計を理解する上でも大切です。具体例と合わせて見ていきましょう。「コインを投げる」「サイコロを振る」「番号札を引く」のように、同じ条件で何度も繰り返すことができる実験や観測を**試行**(trial)といいます。実験や観測というと難しそうに聞こえますが、「コインを投げる」ことや「サイコロを振る」ことも実験です。

同じ試行を何度も繰り返す場合を**反復試行**といいます。

サイコロを振ると1〜6の目が出て、コインを投げると表か裏かわかりますね。試行の結果として起こる事柄を**事象**(event)といいます。

事象は集合の記号を使って表すことができます。例えば、1個のサイコロを振る試行では$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$と表すことができます。

奇数の目が出るという事象をAとする場合、$A = \{1, 3, 5\}$となります。この場合、偶数の$\{2, 4, 6\}$は事象A以外に該当します。これを、**余事象**といい、$\bar{A}$もしくはA^cと表します。



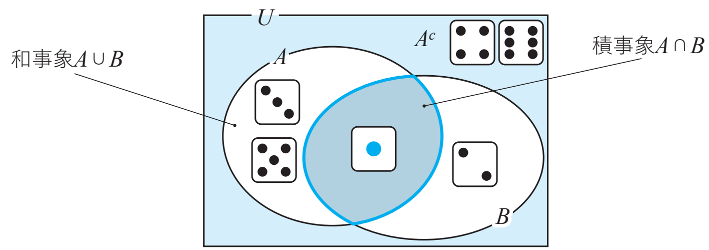
事象が1つの要素からなる集合で表される事象を、**根元事象**といいます。1個のサイコロを1回振る場合の根元事象は$\{1\}$、$\{2\}$、$\{3\}$、$\{4\}$、$\{5\}$、$\{6\}$で、1枚のコインを1回投げる場合は{表}、{裏}です(側面で立つ場合を除いています)。

存在しない事象を**空事象**といい、空集合と同様に$\varnothing$で表します。1〜6の目のサイコロを1回振る場合であれば、0の目が出たり7の目が出たり、3.5の目が出る事象はないので、空事象となります。

	サイコロ	コイン
試　行	1個のサイコロを1回振る	1枚のコインを1回投げる
事　象	{奇数の目が出る} = $\{1, 3, 5\}$ {偶数の目が出る} = $\{2, 4, 6\}$	{表が出る} = {表} {裏が出る} = {裏}
根元事象	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$	{表}、{裏}
全事象	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	{表、裏}
空事象	$\varnothing$	

事象AとBのうちAまたはBが起こる事象を「**和事象**」といい、$A \cup B$と表します。AもBも起こる事象を「**積事象**」といい、$A \cap B$と表します。

例えば、事象Aを、1個のサイコロを1回振ったときに奇数の目が出る事象とし、事象Bを、1個のサイコロを1回振ったときに2以下の目が出る事象とするとき、$A = \{1, 3, 5\}$、$B = \{1, 2\}$となり、$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$、$A \cap B = \{1\}$となります。和事象と積事象の関係をベン図で表すと下のようになります。



01

記述統計と推測統計

わかりやすくする統計と予想する統計

統計学には、さまざまな用語があります。ここでは、具体例と合わせて用語を押さえていきましょう。統計でよく使う用語といえば**データ**です。データは資料、実験や観察などによって得られた事実や科学的な数値を指します。数値だけではなく、事実もデータに含まれます。

春、夏、秋、冬という四季や、血液型のA型、B型、O型、AB型などもデータですし、小学校、中学校、高校、大学もデータです。

統計調査の対象となるデータのもとになっている人やモノの集まりを**母集団**といいます。

近年はデータの重要性が日に日に増していますが、データを適切に扱う上で、身近にあるものが統計学です。

例えば、左下にあるテストの点数のような数値データをただ眺めても、その特徴を理解するのは困難です。

そこで、右下にあるように最高得点や平均点を求めたり、場合によっては偏差値を求めたり、受験であれば合否判定をしたり、意味のある数値にします。つまり、統計は雑多なデータを、価値のある、意味のある情報に変えることととらえることができます。

47	84	61	70	84
69	72	54	86	86
59	68	60	75	59
54	76	64	88	80
67	74	81	62	51
42	97	77	47	94
57	78	87	92	48

→

最高点：97
最低点：42
平均点：70
標準偏差：14.8

雑多なデータ → 意味のあるデータ
統計

統計は大きく分けて**記述統計**(descriptive statistics)、**推測統計**(inferential statistics)、**ベイズ統計**(Bayesian statistics)の3つがあります。

記述統計は、データの特徴をわかりやすくすることが目的の統計です。わかりやすくする手段として、次の3つがあります。

①「数値」にする(平均点、偏差値など)
②「表」にする(度数分布表、クロス集計表など)
③「グラフ」にする(棒グラフ、円グラフ、ヒストグラムなど)

一方で推測統計は、標本(サンプル)と呼ばれる一部のデータから、母集団データを推測します。推測という言葉は難しいですが、ざっくりとしたイメージでいうと予測です。推測のなかで、未来のことについて推し測ったものが予測です。ただし、この推測統計は未来のことだけではなく、過去のことも推し測ります。

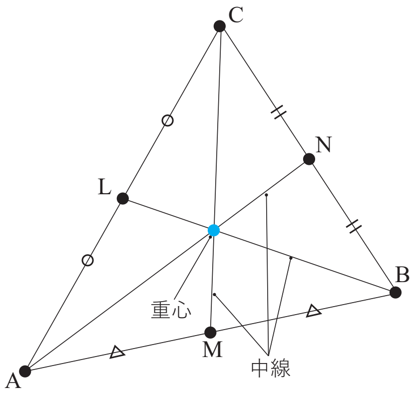
ベイズ統計は、ベイズの定理(条件付き確率)にもとづいて行なわれる統計的な手法の一つです。ベイズ統計は、既知の事象をもとに、未知の事象の確率を推定するのに役立つ手法です。ベイズ統計の一つの特徴は、事前の情報(事前確率)を組み込むことができるという点です。新しい情報(新たなデータ)が得られたとき、ベイズの定理を使って、事前の情報(事前確率)を更新し、新しい情報(事後確率)を得ることができます。これは「**ベイズ更新**」と呼ばれます。

ベイズ統計は、データ解析だけでなく、機械学習やAIの分野でも広く応用されています。特に不確実性が大きい問題や、新しいデータが続々と得られるような状況では、ベイズ統計のアプローチが有効に働くことが多いです。

01 三角形の五心

内心、外心、重心、垂心、傍心を押さえよう

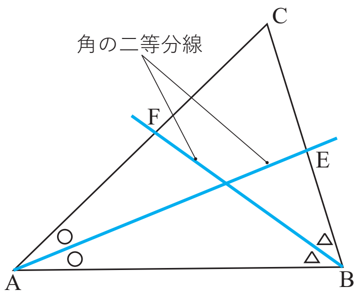
　三角形には、中心を表すさまざまな点があります。まずは**重心**から見ていきましょう。右図のように△ABCがあり、線分AB、BC、CAの中点をそれぞれM、N、Lとします。△ABCの頂点A、B、Cから、それぞれの対辺の中点を結んだ線、AN、BL、CMを**中線**といいます。

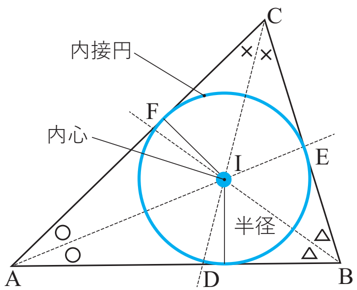


　△ABCの3本の中線は1点で交わり、その交点を△ABCの重心といいます。

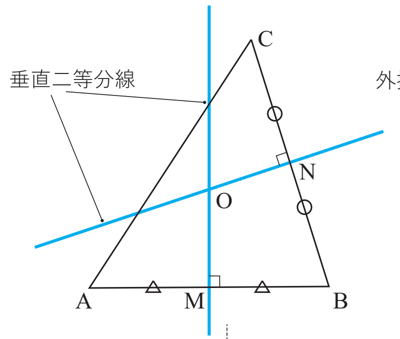
　重心は、各々の中線を2：1に内分する性質があります。

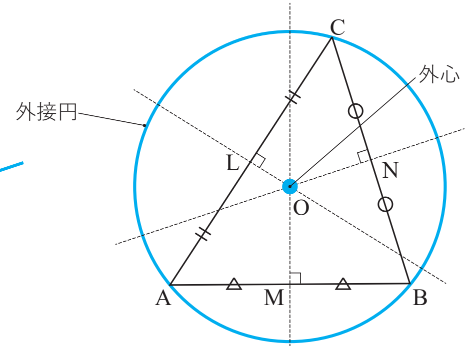
　続いて**内心**です。内心は、三角形の3つの角のそれぞれの二等分線が交差する点です。内心は、各辺までの距離が等しくなるので、内接円を描くことができます。内心と各辺の距離が内接円の半径になります。内心の位置は三角形の各辺の長さにより変化します。

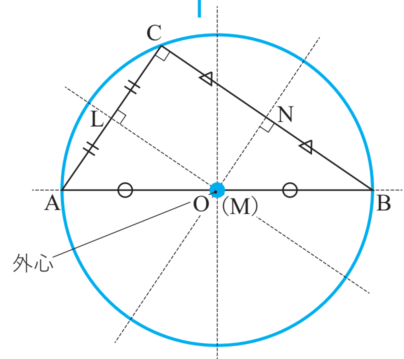




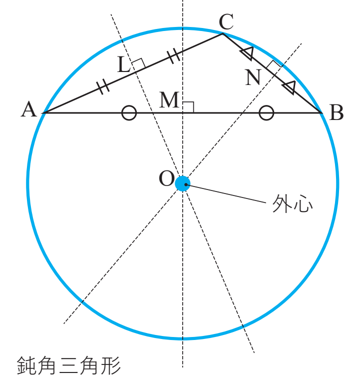
　外心は、三角形の各辺の中点を通る垂線（垂直二等分線）が交差する点です。外心は、三角形が形成する外接円の中心となります。なお、鋭角三角形では三角形の内部に、直角三角形では斜辺の中点に、鈍角三角形では三角形の外部に存在します。







直角三角形



鈍角三角形