04 互いに素・既約分数

最大公約数が鍵

「**互いに素**」とは、共通部分がないことをいいます。数学では、整数関係と集合の問題で使われます。集合における「互いに素」は、後の章で詳しく紹介します。

整数関係の問題では、2つの整数aとbを共に割り切る整数が1しかないことで、最大公約数が1（共通の約数が1だけ）の場合と考えることもできます。式で表すと、$\gcd(a, b) = 1$ の場合です。

例えば、14と15を共に割り切る整数は1だけなので、14と15は互いに素です。

$14 = 2 \times 7$、$15 = 3 \times 5$ から、$\gcd(14, 15) = 1$ より、14と15は互いに素

12と15は、共に割り切る整数として3があるので、互いに素ではありません。

$12 = 3 \times 4$、$15 = 3 \times 5$ から、$\gcd(12, 15) = 3 \neq 1$ より、
12と15は互いに素ではありません。

もちろん、すだれ算を用いて $\boxed{\gcd(12, 15) = 3}$ を求めることもできます。

$$
\begin{array}{r|rr}
3 & 12 & 15 \\
\hline
 & 4 & 5
\end{array}
$$

分数において、約分ができない分数を**既約分数**（きやくぶんすう）といいます。既約分数 $\dfrac{a}{b}$ は、分子の a と分母の b の最大公約数が1のとき、つまり、a と b が互いに素 $\gcd(a, b) = 1$ のときと言い換えることもできます。

既約分数に対して、約分できる分数を**可約分数**といいます。

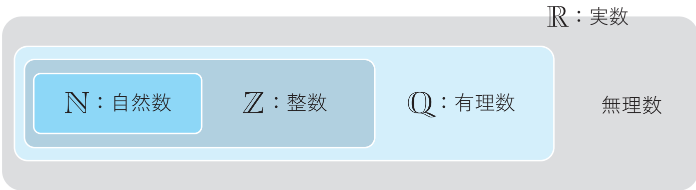
$\dfrac{14}{15}$ は、14と15が互いに素 $\gcd(14, 15) = 1$ なので、既約分数です。

$\dfrac{12}{15}$ は、12と15が互いに素ではない $\gcd(12, 15) = 3$ なので、可約分数

で、最大公約数である3で約分できます。

$$\frac{12}{15}=\frac{12\div 3}{15\div 3}=\frac{4}{5}$$

「互いに素」という言葉を初めて耳にするのは、高校数学の無理数の証明でしょうか。ここで、数にまつわる用語を確認していきましょう。



自然数(Natural number)は、1、2、3……と個数や順番を数える数です。0を含める流儀もありますが、本書では1から始める流儀に従います。自然数は無限にあるので、自然数全体を表す集合は$\mathbb{N}$や**N**を用います(記号の由来はNatural numberの頭文字のNです)。

整数(integer)は、……－3、－2、－1、0、1、2……と自然数に0を加え、マイナスしたものを含めた数です。整数全体を表す集合は$\mathbb{Z}$や**Z**を用います。記号の由来はドイツ語の整数Ganze Zahlとされています。

有理数(Rational number)は、整数の比(分数)で表すことができる実数です。有理数全体を表す集合は$\mathbb{Q}$や**Q**を用います。記号の由来は、イタリアの数学者ペアノが、商を表すイタリア語Quozientreの頭文字をとって有理数を表記したことからとされています。

実数(Real number)は、$\sqrt{2}$やπなど、整数の比(分数)で表すことができない数を含んだ数です。実数全体を表す集合は$\mathbb{R}$や**R**を用います。

実数のなかから、有理数を除いた数(分数で表すことができない数)を**無理数**(Irrational number)といいます。

なお、上記で記載した$\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$を黒板太字といいます。本来は、**N**、**Z**、**Q**、**R**のように太字を用いますが、黒板に先生がチョークなどで書くときに、太字をなぞるのは大変なので、文字の一部の線を2本にすることで、太字を表しているのです。

06 部分分数分解

「通分の計算」の反対を探る

$6 \div 3$は整数で割り切れるので2という答え(商)を求めることができますが、$5 \div 3$は割り切れません。割り切れない数を表す方法として、$\frac{5}{3}$のような分数があります。$\frac{5}{3}$は、分子のほうが分母より大きいので**仮分数**となります。分子より分母のほうが大きい分数は**真分数**といいます。

ここで、冒頭の$6 \div 3$を無理やり分数にすると、

$$6 \div 3 = \frac{6}{3}$$

となりますが、この$\frac{6}{3}$と2は同じ値です。$\frac{6}{3}$が$\frac{6 \div 3}{3 \div 3} = \frac{2}{1} = 2$にできるように、分数は分母と分子に同じ数をかけたり、割ったりすることができます。特に分母と分子を同じ数で割ることを**約分**といいます。

分数は、分母が違う数を下の式のように足し算・引き算することはできません。

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \cancel{\frac{7}{10}}$$

では、なぜダメなのでしょうか？ もちろん次の式のように「具体的に小数にできる数を使って」、おかしいことを確認することもできます。

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$は0.5ですから、$0.5 + 0.5 = 1$とならなくてはなりませんが、この式は$0.5 + 0.5 = 0.5$となっていますからおかしいですね。しかし、まだ納得できない人もいるでしょう。そこで、少し違う観点から見ていましょう。

ここで一つ質問があります。

$2_{(\mathrm{cm})}$と$5_{(\mathrm{m})}$を足し算するとどうなりますか？

$2_{(\mathrm{cm})} + 5_{(\mathrm{m})} = 7_{(\mathrm{cm+m})}$とはしませんね。cmとmで単位が違うので、まず単位をそろえるはずです。$5_{(\mathrm{m})} = 500_{(\mathrm{cm})}$なので、この問いの場合は、

$$2_{(\mathrm{cm})} + 5_{(\mathrm{m})} = 2_{(\mathrm{cm})} + 500_{(\mathrm{cm})} = 502_{(\mathrm{cm})}$$

とします。分数の足し算・引き算もこれと同じ発想をします。ここで、分数の計算をする前に、分数の意味付けをしてみましょう。

$\frac{2}{3}$ は、$\frac{1}{3}$ が2つあるので、$\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$ と考えることができます。同様に、$\frac{5}{7}$ は、$\frac{1}{7}$ が5つあるので、$\frac{5}{7} = 5 \times \frac{1}{7}$ と考えます。つまり、

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = 2 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{7}$$

とすることができます。$\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{7}$ は、先ほどの2 (cm)と5 (m)を足し算する問題における、単位が違う状態です。先ほどの問題で単位を合わせたように、この計算問題では、分母を合わせなくてはいけないのです。そして、2つ以上の分数の分母を共通にすることが**通分**でした。通分には最小公倍数を利用します。$\frac{1}{3}$ の分母3と $\frac{1}{7}$ の分母7の最小公倍数は $3 \times 7 = 21$ なので、

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} + \frac{5 \times 3}{7 \times 3} = \frac{14}{21} + \frac{15}{21} = \frac{29}{21}$$

と計算できます。計算できる理由は、下の式のように変形して、

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{14}{21} + \frac{15}{21} = 14 \times \frac{1}{21} + 15 \times \frac{1}{21}$$

「$\frac{1}{3}$ が2個」と「$\frac{1}{7}$ が5個」の計算を「$\frac{1}{21}$ が14個」と「$\frac{1}{21}$ が15個」と、分母をそろえた（単位を合わせた）からです。

なお数学には、一方向の計算方法に名前があれば、その逆方向の計算方法にも名前があります。通分による計算の逆方向の計算を、**部分分数分解**といいます。つまり、通分でまとめた分母を、元の式に戻すことです。

高校以降で、後に紹介する Σ の計算や微分積分を学習しますが、それらの計算で活用します。

通分

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{14}{21} + \frac{15}{21} = \frac{29}{21}$$

部分分数分解

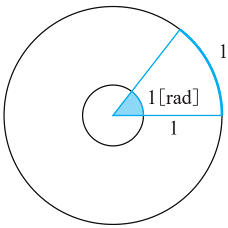
08 度数法、弧度法とラジアン

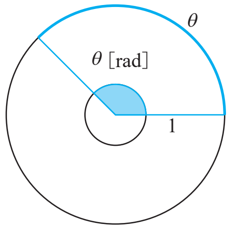
角度を長さで測る理由

30°や45°のように、私たちが普段使う度(°)を用いて角度を測る表し方を、**度数法**もしくは**60分法**といいます。

度数法は慣れ親しんでいるためわかりやすいのですが、あまり応用できないという弱点があります。度数法の弱点を補うものが弧度法です。

弧度法は、角度を円の弧の長さで測る方法です。半径1の円において、「半径と等しい長さ1の弧に対する中心角の大きさ」を **1ラジアン**[rad]または**1弧度**と定義します。そのため、弧の長さθに対応する中心角の大きさはθ[rad]です。度数法の°は省略されませんが、弧度法の[rad]は省略することが多いです。ラジアンは、半径を意味するラテン語radiusが由来で、イギリスの工学者トムソンによって導入されました。

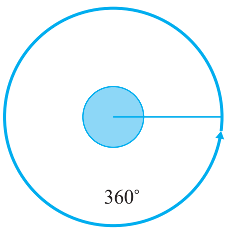


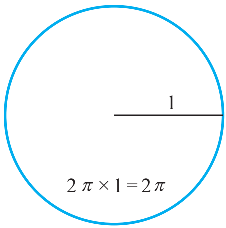


それでは、度と弧の長さの関係を見てみましょう。

左下図のように、半径1の円の半径を1周させると360°となります。

右下図のように、半径1の円の円周の長さを求めると、$2\pi r$のrに1を代入して、$2\pi \times 1 = 2\pi$となります。





360°と2πは同じ部分を指しているので、次の式が成立します。

$$360^\circ = 2\pi$$

この両辺を2で割って、

$$180^\circ = \pi \cdots\cdots ★$$

となります。この★の式が、度数と弧度の関係式となります。

弧度を度数にする場合は、★を直接使います。

$$\frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ、\quad \frac{3\pi}{4} = \frac{3 \times 180^\circ}{4} = 3 \times 45^\circ = 135^\circ$$

度数を弧度にする場合は、★の両辺をかけ算(もしくは割り算)します。例えば、45°を弧度にする場合は、★の両辺を1/4倍します。

$$45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

なお、私の教え子で、円周率の3.14……と180°が同じなんて納得できないと言った学生がいました。この疑問はとても鋭く、これは弧度法の単位が省略されているため起こるものです。例えば「12 = 1」と書いてあれば、おかしな式だと思う人は多いと思います。そこで、この違和感のある式に、単位を補足すると納得できるでしょう。

12[本] = 1[ダース]

弧度法も本来は、π [rad] = 180°と、単位が省略されていることを、頭の片隅に置いておいてください。

度数法はわかりやすいのですが、角の大きさを「長さ」として使う三角関数などで応用する際は、やや面倒になります。特に、三角関数を微分や積分する際に、計算が面倒になります。そこで活用するのが弧度法です。

この例は(＊)で求めるのも、それほど大変ではありませんでしたが、次の例ではどうでしょうか？

$$\frac{1}{2^{2n+3}}+\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+1}}+\cdots\cdots+2^{n+3}+2^{n+4}+2^{n+5}$$

この項数を求めるのは大変です。しかし(＊＊)を用いると、

$$\frac{\text{末項}\times r-\text{初項}}{r-1}=\frac{2^{n+5}\times 2-\frac{1}{2^{2n+3}}}{2-1}=2^{n+6}-\frac{1}{2^{2n+3}}$$

と、容易に求まります。もちろん(＊)で求めることもできます。その場合、項数は$(2n+3)+1+(n+5)=3n+9$なので、次の通りになります。

$$\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{\frac{1}{2^{n+3}}\times(2^{3n+9}-1)}{2-1}=\frac{2^{3n+9}}{2^{2n+3}}-\frac{1}{2^{2n+3}}$$
$$=2^{3n+9-(2n+3)}-\frac{1}{2^{2n+3}}=2^{n+6}-\frac{1}{2^{2n+3}}$$

計算結果を見るとわかりますが、この例を(＊)で求める場合、項数を求めるのも、項数を求めた後の計算も大変です。

ここで、等比数列の和(＊)を示します。等比数列の和の計算も、上手な解き方があるので見ていきます。等比数列の和をSとします。

$$S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-1}\quad r(\neq 1)$$

両辺をr倍したものを用意して引きます。

$$\begin{array}{rl} rS= & \quad\ ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \\ -)\ S= & a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1} \\ \hline \end{array}$$

$$rS-S=-a+ar^n$$

$$S(r-1)=a(r^n-1)$$

この両辺を$r-1(r\neq 1)$で割ると、

$$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

となり、(＊)の左辺の公式が求まります。分母と分子に(-1)をかけることで(＊)の右辺の公式も求まります。

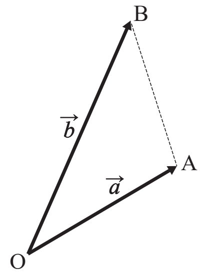
ここで、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\vec{a}$ の和を考えると、$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ となります。この $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ は、始点と終点が一致した大きさが0のベクトルで、**零ベクトル**といい、$\vec{0}$ と表します。等式で表すと、次の通りです。

［零ベクトル］　$\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}$

次に逆ベクトルを利用して、ベクトルの減法を考えていきます。

2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に対して、ベクトルの差を次の式で定めます。

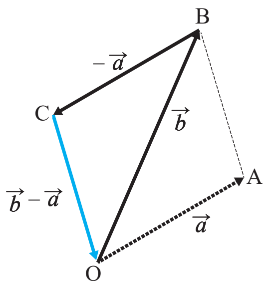
$$\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$$



$\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は大きさと方向が等しいので $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ です。

$$=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

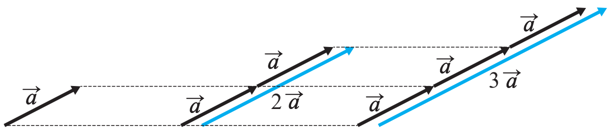


よって、

$$\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となります。

$\vec{a}$ に $\vec{a}$ を加えると、方向は同じまま大きさが2倍、さらに $\vec{a}$ を加えると、方向は同じままで大きさが3倍となります。これらを $2\vec{a}$、$3\vec{a}$ と表し、**ベクトルの実数倍**といいます。



［ベクトルの実数倍］　$\vec{a}$ と実数 $k \neq 0$ に対して、$k\vec{a}$ を次の通り定めます。
k が正の数の場合 $k\vec{a}$：$\vec{a}$ と同じ方向で、大きさが k 倍のベクトル
k が負の数の場合 $k\vec{a}$：$\vec{a}$ と逆方向で、大きさが $|k|$ 倍のベクトル