1-2 虚数で波を表わせる

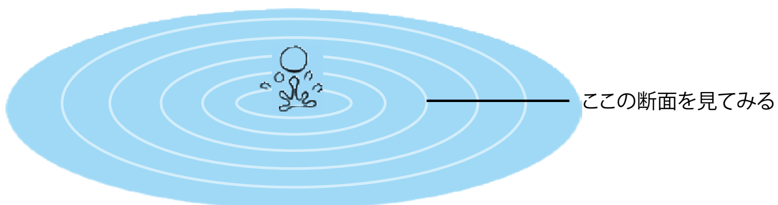
「虚数で波を表わせる」と言っても、多くの方がピンとこないでしょう。これから順を追って、説明したいと思います。

大まかな流れは下のようになっています。全体像を忘れないように読み進めてくださいね。

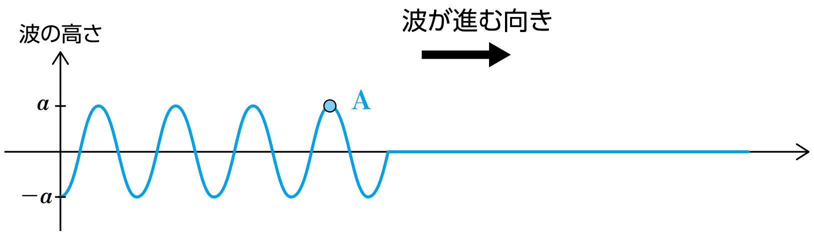
1. 波を式で表わすにはどうすればよいか考える
2. 三角関数が波を表わすのに都合がよいことを説明する
3. 三角関数より虚数を使った方が、表記がすっきりすることを説明する

まず、波を式で表わすためにどうすればよいか考えます。

例えば水面に、こんな波があったとします。この波を表現することを考えてみましょう。

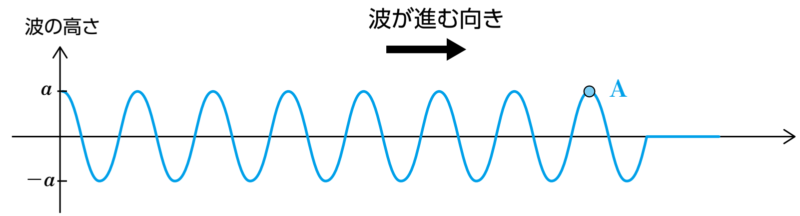


この波は2次元で扱いづらいので、まず上に示す線で断面を見ることを考えます。すると、波は下のようになっているでしょう。

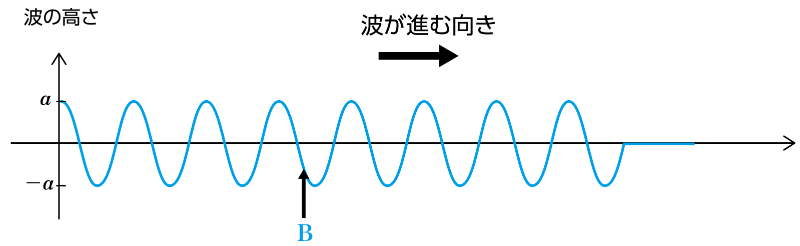


この波は時間が経つにつれて、次のように変化しています。例えば、波の頭であるA点は図の右に向けて動き、ある時間後には下のような場所に移動します。

波はこのように動いていきます。



ここである場所Bにおいて、ある時間における波の高さを表現するためには、どうすればよいでしょうか？



まず、この波の振幅（高さ）は知っておく必要がありそうです。この波の振幅aを知らないと、ある位置Bにおける波の高さはわからないでしょう。

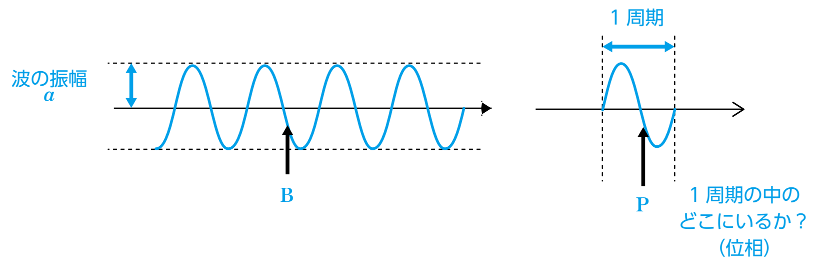
ただ、この波の振幅だけでは情報が不十分です。なぜなら、波はどんどん進んでいくので、ある振幅の波が進むときには、時間によって点Bの高さは違うからです。

そこで必要なのが、B点が波の繰り返し（1周期）の中のどこにいるかという情報です。例えば、B点が波のPという位置にいることがわかれば、

A点の高さはわかります。この情報を位相と呼びます。

つまり、波を表わすためには、「波の振幅」、そして「波が繰り返しの中のどこにいるか」という2つの情報が必要となるのです。

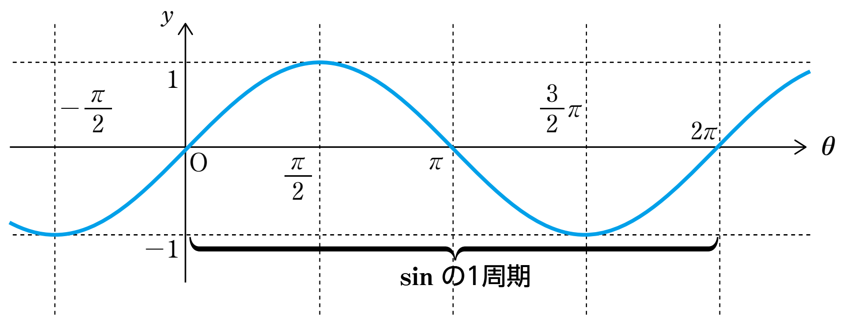
波を表わすためには2つの情報が必要



次に、波を表わすのに三角関数が便利であることを説明します。

これはグラフの形を見てもらえればわかると思います。三角関数のsinやcosのグラフの形はまさに「波」そのものです。

$y = \sin\theta$ のグラフはまさに波を表わす



ですから、「波」を表わすのに三角関数を使うことにしたわけです。

これで数式を使って波を表わすことができるようになりました。ここで、波を数式で表わすとどうなるか示します。今は中身を理解する必要はありませんので、「三角関数で波を表わせるんだなー」という理解で十分です。

$$\overset{\text{波の振幅}}{a}\sin\left\{\underbrace{2\pi \underset{\text{周波数}}{f}\left(\overset{\text{時間（変数）}}{t}-\frac{\overset{\text{距離（変数）}}{x}}{\underset{\text{波の速さ}}{v}}\right)}_{\text{sin の中身が位相}}\right\}$$

先ほど波を表わすのに2つの情報が必要という話をしました。その2つとは波の「振幅」、繰り返しの中のどこにいるかという「位相」です。振幅と位相はよく出てくる言葉ですので、覚えておくとよいでしょう。

そして3つ目です。ここで虚数が登場します。先ほどまでの議論で、三角関数を使って波を表わせることがわかりました。「波を数学で表わす」という意味では、三角関数を使えば十分です。

あえて虚数を使う理由は三角関数より指数関数の方が「楽」に波を扱えるからです。虚数なんて新しい数を持ち出すと難しく思えるかもしれません。しかし、それ以上に「楽」になるから、虚数を使うのです。

ここで登場するのが、有名な公式である「オイラーの公式」です。これは下のようなものです。

オイラーの公式：$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

※ e はネイピア数（自然対数の底）

詳しくは4章で説明するので、今は式の形だけに着目してください。ここで左辺はネイピア数と呼ばれるeを使った指数関数、右辺は三角関数になっています。

つまり、この式は三角関数と指数関数を、虚数iを通じてつなげた式と解釈できます。オイラーの公式とは三角関数と指数関数をつなげる公式と言えるわけです。

そして、三角関数より指数関数の方が「楽」に扱えることが大事です。

その根拠の1つ目は表記が楽ということです。左辺が指数関数で、右辺が三角関数です。指数関数の方が、画数も少なく楽に書けることがわかると思います。

「そんなこと」と思うかもしれませんが、たくさんの数式を扱う時には、コンパクトに表わせることはとても重要です。

そして、ハッキリと差が現れるのが、かけ算の楽さです。指数関数のかけ算は指数の部分を足し算するだけで計算できます。さらに割り算は引き算になります。だからとても計算が楽なのです。例えば、「$0.985\times1.025\div0.852$」よりも、「$0.985+1.025-0.852$」の方がはるかに簡単ですよね。

そして指数に虚数が入っても、この指数関数の性質は受け継がれます。

指数のかけ算は足し算

$$a^n\times a^m=a^{(n+m)}$$

例）$2^3\times2^2=2^{(3+2)}=2^5=32$

指数の割り算は引き算

$$a^n\div a^m=a^{(n-m)}$$

例）$2^4\div2^2=2^{(4-2)}=2^2=4$

その反面、三角関数のかけ算をしようとすると、非常に式がややこしくなります。高校で数学を学んだ時には、三角関数の公式の多さに悩まされた人も多いのではないでしょうか？

三角関数のかけ算は扱いが複雑（三角関係の積和の公式）

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$
$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

このように三角関数より、虚数と指数関数を組み合わせた方が楽に扱えるので、波は虚数を使って表わされるようになったのです。

まとめると波を表わすために虚数を使う流れは下のようになります。

1. 三角関数で波が表わされる
2. オイラーの公式より、三角関数は虚数と指数関数で表わされる
3. 指数関数の方が三角関数より扱いやすい（計算しやすい）

波を表わすために、虚数を使う理由を感じていただけたでしょうか？

本書では2章と4章にて波を虚数で表わす例を紹介しています。

2章ではまず交流を虚数で表わす例を紹介します。コンセントからとる電気を交流と呼びます。これはプラスとマイナスの電気が波のように変わるので、虚数を使って表現すると便利なのです。さらに、携帯電話の通信に使われる波についても、どのように虚数が使われているかを解説します。

そして4章ではさらに突っ込んで、ある波形を周波数の異なる波に分解するフーリエ変換や量子力学における波をどのように虚数で表わすのかについて、詳しく紹介していきます。本書を通じて、波と虚数の繋がりを感じていただければ、と思います。

2-3 スマホは虚数で情報を送っている

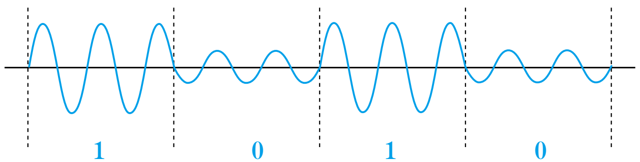
次に電波通信のお話です。スマホなどの携帯電話、Wi−Fi通信、それにテレビやラジオなどは電波を使って、情報を送受信していることはご存知でしょう。

この章では、電波を使って情報を送るために活躍している虚数についてお話しします。波を表わすために虚数が便利な性質が、ここでは活かされています。

最初に、電波で情報を送るとは、どういうことなのかお話ししたいと思います。

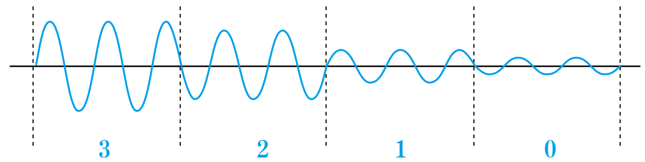
例えば0と1の信号を送ることを考えてみましょう。一番簡単なのは、次のように信号の振幅に意味を与えることですね。

つまり振幅が大きいと1、小さいと0という具合に情報を送るわけです。



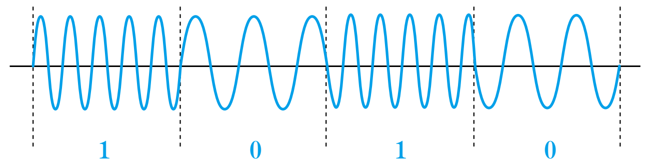
このような方法が振幅変調AM (Amplitude Modulation) と呼ばれます。AMラジオは電波の振幅に情報を与えているのです。

AMでは、もっと振幅の刻みを細かくした時、例えば次のように4段階にして、0,1,2,3という4つの情報を送ることもできます。



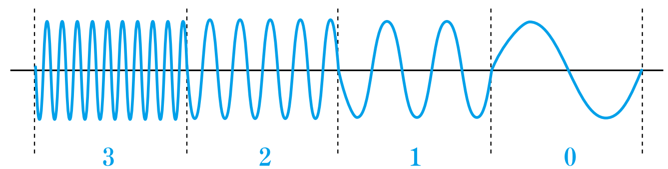
次に、波の変動の速さ、周波数に情報を与える方法があります。

つまり下のように波の変動が速い時と遅い時に0と1を割り当てます。



この方式は周波数変調FM (Frequency Modulation) と呼ばれます。FMラジオはこのように周波数に情報を与えています。

FMを使ってもっと周波数の刻みを細かくして、例えば下のように4段階にして、0,1,2,3という4つの情報を送ることもできます。



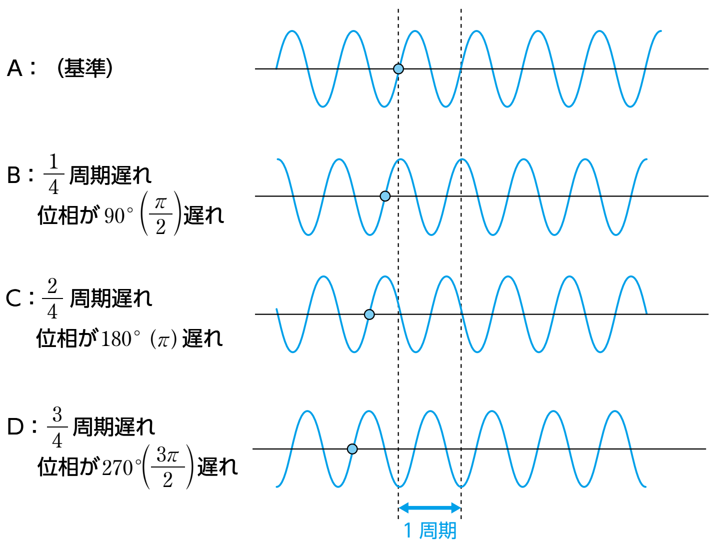
最後が位相変調PM（Phase Modulation）と呼ばれる方式です。これは位相に情報を与える方法です。

位相変調はやや難しい概念なので、詳しく説明します。次ページの図に、A,B,C,Dの波があります。これは振幅も周波数も同じです。ですが、波がずれていることがわかるでしょう。この波の繰り返し内の場所のことを位

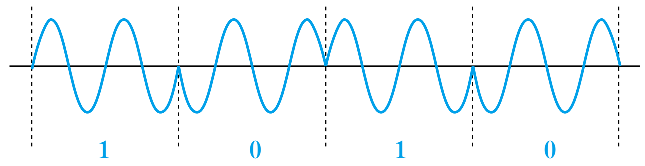
相と呼んでいます。

この図ではAを基準として、同じ点を点●で示しました。1周期は図で示した部分ですから、Aに対して$\frac{1}{4}$周期ずつ遅れている波がB,C,Dになります。Dからさらに$\frac{1}{4}$周期遅れると1周期の遅れになるので、Aと重なることになります。

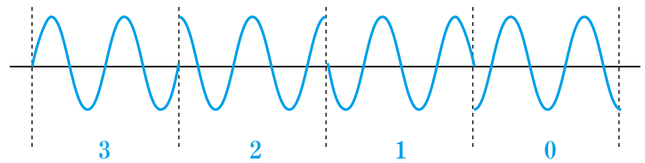
波は三角関数で表わされることが一般的です。ですから、波の位相は角度で表わします。つまり、1周期を360°とするので、半周期の遅れは180°の遅れ、$\frac{1}{4}$周期の遅れは90°の遅れと表現します。角度は弧度法（93ページ参照）が使われることも多いので、この場合は1周期が2π、半周期はπ、$\frac{1}{4}$周期は$\frac{1}{2}\pi$と表現されます。



それでは位相を変えた波で情報を送ることを考えましょう。0と1を表現する場合は、次のように半周期異なる2つの波を使います。この場合位相が180°変わっているので、ある波とそれを反転した波で0と1を表わすことになります。

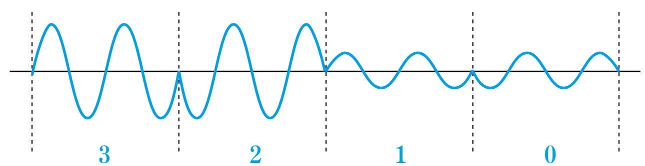


PMでも、位相の刻みを細かくして情報を送ることができます。この場合、下のように位相が90°ずつ異なる（$\frac{1}{4}$ずつ周期が異なる）波で0,1,2,3を関連づけます。



そして、振幅変調と位相変調（周波数変調）を同時に使って、より多くの情報を送ることもできます。例えば下のよう振幅が大きい波と小さい波、そしてある位相の波とそこから180°位相を変えた波を組み合わせます。

振幅の0,1（2つ）と位相の0,1（2つ）を組み合わせて、0,1,2,3（4つ）の情報を送ることができるわけです。



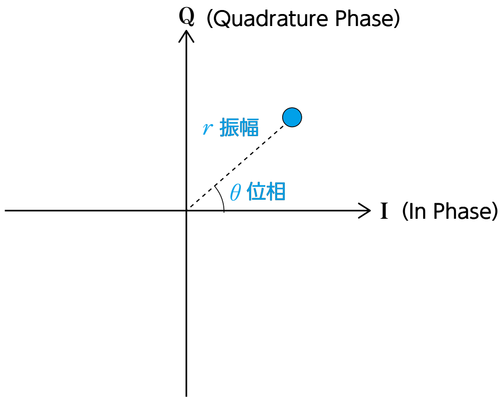
現在はテレビ放送はデジタル化されていますが、デジタル化以前は電波

の振幅に映像の情報、周波数に音声の情報をのせていました。このように変調を組み合わせることにより、より多くの情報が送れるのです。

なおFMとPMは同時に使うことはできません。携帯電話の通信方式では、FMよりPMの方が通信効率を高めやすいのでPMが使われています。

実際には、携帯電話では通信効率を高めるために位相変調と振幅変調を組み合わせたQAM（Quadrature Amplitude Modulation）という方法が広く使われています。

このQAMの通信方法を表現する時に、コンスタレーションという図が使われますので、この図を説明します。この図の横軸はI軸（In Phase）、縦軸はQ軸（Quadrature Phase）と呼ばれます。



このI－Q図はまさに複素平面を表わしています。

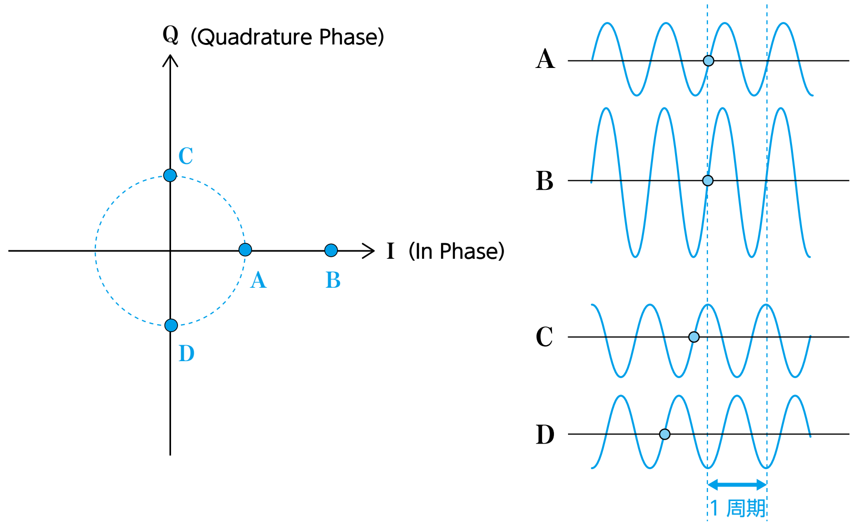
そしてこの図によって位相変調と振幅変調の組み合わせを説明できます。図で、原点からの距離が振幅、x軸の正の方向とある点への直線が作る角が位相を表わしています。

少しわかりにくいと思うので具体的に説明します。下の図のx軸上でBの点はAの点の倍の距離にあります。x軸との角度は0°で同じですから、これは位相がそろっていて振幅の違う波になります。

次にAとCを比較します。これらは原点からの距離は同じですが、Aの角度は0、Cの角度は90°ですから、図のように振幅が同じで位相が90°遅れた波を表わします。

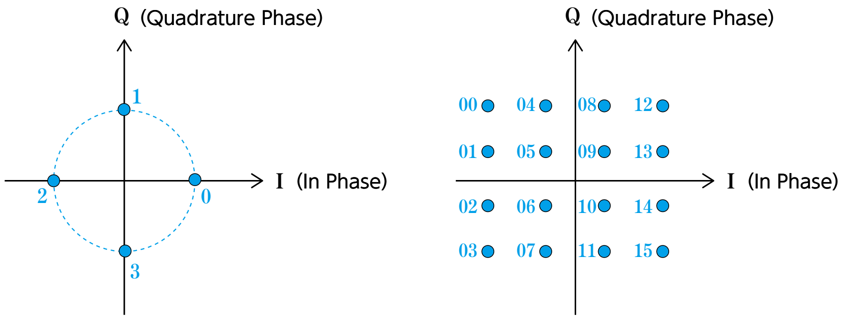
なお、Dの点はC点から見て、逆方向にあります。つまり、振幅を-1倍したもので正負が逆の波形になっているのです。

また、見方を変えるとC点から180°位相が遅れているとも言えます。これも正しくて、180°位相が遅れるということと符号を反転させることは同じことを表わしているわけです。



これがコンスタレーションという図です。あるQAMの通信を考える時、この図中の点が多いほど、一度に多くの情報を送ることができます。

つまり、点が4つだと、一度に0,1,2,3の情報しか送れませんが、点が16だと一度に0,1,2,……,15の16の情報を送れるわけです。後者の場合は前者の4倍の情報を送ることができます。



しかしながら、一度にたくさんの情報を送る場合、比較的似た波形を使うことになります。つまり、電波状態がよくないとエラーが増えるのです。

実際の携帯電話の通信では、電波状況により方式を切り換えています。つまり電波状態が悪い時は一度に送る情報量を減らして、通信速度は遅いけれどエラーは少ない方式にします。一方、電波の状態がよければ、一度に送る情報量を増やして、通信速度が速い方式に切り換えるのです。

スマホを使っていて、場所によって通信速度が速かったり、遅くなったりするのを経験した人は多いでしょう。それはこのように自動的に最適な通信速度をスマホが選んでいるからなのです。

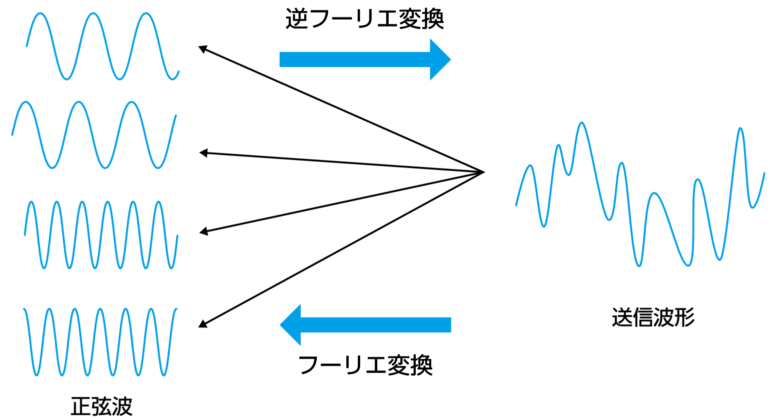
5Gと呼ばれる通信方式では、このシンボル数が4,16,64,256の範囲で切り換えられています。256個のQAM変調は、16個の変調の16倍のスピードで通信が可能です。

さあ、ここまで虚数が出てきませんでしたが、実はこのコンスタレーションという図こそが複素平面なのです。この場合、この複素数を伝達することが情報を伝達することになります。

そして、このコンスタレーションの複素数から、電波の波形を作る数学的な操作が逆フーリエ変換です。

「逆」というくらいなのでフーリエ変換という方法も存在します。フーリエ変換とは下の右にある出したい波形を周波数の異なる正弦波の和で表わす方法です。そして、逆フーリエ変換とは正弦波の情報から、送信波形を作り出す方法となります。

コンスタレーションは正弦波の係数を意味しているので、それを逆フーリエ変換することにより、送信する波形が得られるわけです。



周波数と係数の関数（複素数値）　　時間と振幅の関数（実数値）

一方、電波を受信する時には、送信波形をフーリエ変換してコンスタレーションを得ます。そして、コンスタレーションを情報に変換するのです。すると、情報を受け取ることができます。

携帯電話はこのようにして、情報を伝達しています。ですから、携帯電話の通信に虚数は必須なのです。

なお、先の図にも示していますが、コンスタレーションは複素平面上の数値ですので複素数です。そして、電波の波形は時間と振幅、つまり実数値を値にとります。

つまり、逆フーリエ変換は複素数を実数に変換する、フーリエ変換は実数を複素数に変換する、と考えることができます。

ここまでの話で、複素数は2つの情報を詰め込めると説明してきました。となるとコンスタレーションは2つの情報を含んでいるということですが、その2つとは何でしょうか？

詳細は4章のフーリエ変換と虚数の関係の箇所で説明しますが、正弦波の中でもsin波とcos波を分けているからです。ある波の成分のうちcos波に関連する部分を実数、sin波に関連する部分を虚数に対応させています。だから、複素数を使う必要があるわけです。

ちなみにこのフーリエ変換はなかなか複雑な演算です。しかし、このように携帯電話で情報を送る時には頻繁にこの計算を行なわなくてはなりません。ですから、この計算を早くするほど、携帯電話が速く動作することになります。

フーリエ変換を早く解くための方法（アルゴリズム）はFFT（Fast Fourier Transform）と呼ばれ盛んに研究が行われていて、日々進歩しています。数学の研究が我々の便利な生活に直接役立っているわけです。

2-4 量子力学における虚数の役割

次に量子力学における虚数の役割です。最初に言うと、量子力学においては虚数の「波」を表わす性質が使われています。

量子力学は非常に難解な学問です。その本質を端的に表わすとすると「物体は粒子と波の両方の性質を持つ」と表現するのが適切でしょう。この「波」の性質を表わすために虚数が使われているわけです。

これから、理解を深めるために量子力学という学問自体について少し説明します。前述したように、量子力学の世界では物体は粒子と波の性質を合わせ持ちます。電子といった粒子的な挙動を示す物体が波の性質を持ったり、波だと思われていた光が粒子の性質を持ったりします。

これは、我々の想像をはるかに超えた世界です。簡単に理解できるものではありません。しかし、この効果は非常に微小な世界でしか観測されませんので、多くの場合は大きな問題ではありません。

ということで、人間のスケールの大きさの世界では粒子は粒子として扱って問題ありません。厳密にはニュートン力学は量子力学の物質が大きい極限での近似理論なのですが、そのニュートン力学でも十分なわけです。

同様の例として、アインシュタインの相対性理論があります。物体が光の速度に近づくと時間の流れが遅くなったり、物体が縮んだりと、信じられないような現象が起こるという理論です。

しかし、人間の世界では速度は光速より十分に小さいので、そんなことは考慮しなくても、十分な精度で運動を予測できるわけです。