

はじめに

この本はゲーデルの不完全性定理の証明を納得するための本です。

不完全性定理は、1931年にゲーデルによって証明された論理学の定理です。

数学や物理のトピックの中には、啓蒙書を読んで概要を知ったあと、もう少し詳しく理解したいと思っても、一般向けに書かれている適切な解説書がなく、理解を深めることが困難な概念が数多くあります。中でも特に難解なものとして挙げられるトピックは、量子力学、相対性理論（相対論）、そしてゲーデルの不完全性定理ではないでしょうか。量子力学はディラックやハイゼンベルクらによって、相対性理論はアインシュタインによって、そして不完全性定理はゲーデルによって、20世紀前半に生み出されました。これらはいずれも理解することが難しいだけではありません。それまで当然と思われていた世界の見方を大きく変えたという意味でも、きわめて重要な理論です。

不完全性定理をざっくりいうと…

量子論、相対性理論は聞いたことがあるけれど、そもそも不完全性定理なんて言葉すら聞いたことがないという方もいらっしゃるでしょう。用語の使い方が正確でないところも出てきてしまいますが、正確には本編を読んでいただくことにして、ごく簡単に不完全性定理の内容を述べてみましょう。

数学で扱われる文（命題）は、正しいか間違っているかどちらかであるということを、だれもが経験則で知っています。例えば、

☆「2 より大きい偶数は、すべて 2 つの素数の和で表すことができる」

($4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, ...)

という数学の文（命題）は、すぐには正しいか間違っているかは分からなくとも、正しいか間違っているかは決まっていると考えerでしょう。☆はゴールドバッハの予想と呼ばれ、この予想が正しいとして多くの数学者がこの命題の証明を見つけようと格闘している最中です。もしも予想が間違っていたら、反例（2 つの素数の和で表すことができない偶数）があるはずでずです。2026 年現在、正誤の判定がついていない命題ですから、反例がいつか見つかるかもしれません。しかし、いずれにしる☆の命題が、正しいか間違っているかのどちらか一方であることは、誰もが疑っていないと考えます。

もしも、数学が扱う命題の中に、正誤が判定できない命題が混じっていたらどうでしょう。正誤が判定できない命題には、正しいことを示す証明もありません。その命題を証明しようとする数学者の努力は全くの徒労になってしまいます。なんとも可哀想な話です。数学で扱う命題に正誤が決定されていると考えることは、数学の信頼性を担保していると言えるでしょう。

しかし、数学で扱う命題の中には、正しいとも間違っているとも証明できないものが存在すると主張するのがゲーデルの不完全性定理なのです。数学は、物理学・経済学・情報科学など、背景に数理構造がある現象を扱う学問に、それを表現するための言葉を提供してきました。数学を用いて現象を記述するのは、矛盾のない数学の構造を信頼しているからこそです。その数学に原理的にバグがあるよ、と指摘したのがゲーデルの不完全性定理なのです。

ゲーデルが不完全性定理を発表した 1931 年は、ヒルベルト・プログラムという数学の基礎を固める計画が進行しているときでした。ヒルベルト・プログラムでは、代数・幾何・解析のすべての数学の分野で、公理

（前提となるきまり）を定め、そこからすべての定理を推論によって導くことを目指していました。ですから、不完全性定理はこの計画に冷や水を浴びせることになりました。

数学とは、人間の理性によって積み上げられてきた論理の体系です。カントは「純粹理性批判」の中で、数学は人間に生まれつき備わった空間や時間の認識の仕組みに深く結びついていると論じました。ゲーデルは、その数学の体系をどこまでも整えていったとしても、そこには思いもよらない限界が現れることを示したのです。こうしたことから、「不完全性定理は人間の理性の限界を証明した」という不完全性定理を否定的に捉える言説もあります。

こう書くとゲーデルの不完全性定理を否定的に捉えてしまうかもしれませんが、それはこの本の意図するところではありません。むしろ、不完全性定理を言葉だけで捉えて誤った世界観を持ってしまう人に、不完全性定理の数学的内容を知ってもらい、不完全性定理を正しく評価してもらいたいと私は考えています。不完全性定理を否定的に捉えるのではなく、これをいしずえ礎にして論理学・情報科学が発展していったことに目を向けるべきです。

確かに、不完全性定理は、正しいとも間違っているとも証明できない命題の存在を示しましたが、これは数学の信頼性に疑問を突きつけるほどのものではありません。この命題は、肯定も否定も証明できないように特別な工夫を凝らした命題であって、数学者（数学基礎論以外が専門）が取り組んでいる命題には影響しないでしょう。リーマン予想も反例が見つかるか、証明されるかのどちらかであるという信憑を数学者は持っているはずです。

不完全性定理を証明したゲーデルについても簡単に説明しておきましょう。それにはノイマンから説き起こすのが適当です。

PC・スマホを使うとき、ソフトやアプリをインストールしますね。ソ

フトを読み込んでタスクを実行するという電子計算機を、発案者の名前に
因^{ちな}でノイマン型コンピュータといいます。現在の汎用コンピュータの原
型を作ったのが天才ノイマンなのです。

ノイマンの研究分野は、論理学・数学・物理学・化学・計算機科学・情
報工学・経済学・生物学・気象学・心理学・社会学・政治学と多岐にわた
っており、業績は超人的です。ノイマンは「二十世紀最高の知性」と呼ば
れています。

実は、ノイマンも不完全性定理を証明しようとしていました。しかし、
ゲーデルの方がノイマンよりも先に証明したのです。以後、ノイマンは論
理学の研究をしていません。ノイマンは、人から「二十世紀最高の知性」
と呼ばれるたびに、「それは自分ではなくゲーデルのことだ」と返したと
いいます。

第二次世界大戦中、ゲーデルはオーストリアで危機に瀕^{ひん}していました。
このときノイマンは、

「ゲーデルをヨーロッパの瓦礫^{がれき}の中から救い出すことほど重要なこと
はない」

と主張して、プリンストン高等研究所にゲーデルを招^{しょうへい}聘するのに尽力し
ました。

研究所で一緒に働いていたことがあるアインシュタインは、「私が研究
所に行くのは、ゲーデルと散歩する恩恵に浴するためだ」と後年述懐して
います。

ゲーデルは天才中の天才なのです。

ゲーデルは、不完全性定理以外にも論理学の数多くの業績があり、「ア
リストテレス以来の天才論理学者」と呼ばれています。

そんなゲーデルの名を世に知らしめた不完全性定理を、証明まできちん
と理解することで、あなたも天才に近づいてみませんか。

証拠となる論理式を見せてくれ

理解するのが難しいと言われている不完全性定理。どこがそんなに難しいのでしょうか。

不完全性定理の証明を納得したいと数学教室「和」（著者が講師をしている巷の数学教室）に来られたAさんは、次のように語られました。少し不完全性定理の内容に踏み込んだところもありますが、一読してみてください。

あらゆる学問の中で数学が一番論理的に完全だと思っていました。でも数学には、不完全性定理という数学の論理の不備を突く定理があるらしいじゃないですか。数学が論理的な矛盾を抱えているなんて、俄然興味が湧いたんです。そこで、ゲーデルの伝記を交えて不完全性定理を紹介する啓蒙書を読みました。

ゲーデルは不完全性定理の前に、完全性定理を証明していた？ ええっ、完全と不完全とどっちが正しいの？ まずはそこからですよ。

この疑問を解消すべく、もう少し定理の内容に踏み込んだ解説書を読みました。「完全である」、「不完全である」の主語が違っていたのですね。そこはクリアできました。

その解説書には、不完全性定理は、「論理式には肯定も否定も証明できないものが存在する」ことを主張した定理である、と書かれていました。

そこには証明も書かれていたんです。私にも理解できるかもしれないと期待しながら読んでみました。

論理式をゲーデル数に変換するところまでは分かります。まあ、これは国民全員にマイナンバーがあるように論理式にもナンバーを付けるということですね。

しかし、次からが分かりません。「ゲーデル数 x を持つ論理式は証明

できる」ことを表す論理式 $\text{Pr}(x)$ があるらしいのです。らしいというのは、その本には論理式 $\text{Pr}(x)$ の具体的表現がなかったからです。なんでも表現定理という定理から論理式 $\text{Pr}(x)$ の存在が分かるらしいのですが、いきなりそんなこと言われてもねえ。納得できませんよ。

そこで、もう一冊ほかの本にあたってみました。今度は、ゲーデルの不完全性定理に関する本ではなく、数理論理学の教科書っぽい本です。この本では、「ゲーデル数 x を持つ論理式が証明できる」という命題は、計算可能な x の関数で表すことができるので、論理式 $\text{Pr}(x)$ が存在すると書かれていました。数学の証明ですから、そのものズバリを示さなくても存在の証明になる場合があることは重々承知しています。それでも、論理式で表された命題と計算可能な関数の間にはギャップがありすぎて、モヤモヤとした気分が晴れません。

論理式 $\text{Pr}(x)$ は、論理式というからには、 $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\neg$ 、 $\rightarrow$ 、 $\forall$ 、 $\exists$ 、 $=$ 、 $+$ 、 $-$ やアルファベットを並べてできているものですよね。それなら、私の目の前で並べてみてくれませんか。

全くごもっともです。私自身もこのような感慨を持ってさまよいましたから、お気持ちはよく分かります。

ですから、この本では論理式 $\text{Pr}(x)$ と証拠となる論理式（ゲーデル文）を明示することにしました。上のような感慨をお持ちの方には、ぜひともこの本を読んで、論理式（ゲーデル文）を体感してもらいたいと思います。

不完全性定理の証明攻略のための道筋

この本の章立てを紹介していきましょう。

0章では、不完全性定理の証明を理解するために必要な数学のうち、高校数学で習うものや無限についての考え方を紹介します。論理学は文系と理系の境界にある学問なので、数学的な表現に慣れておく必要があるので

す。

この本を読まれる方の中には、高校で数学を選択しなかった方もいるでしょう。しかし、ご安心ください。この本を読むために前提とする数学の予備知識はありません。文字式は出てきますが中学数学で習ったものばかりです。高校以降で習う数学で証明の理解に必要な項目は、この本の中で解説していきます。

逆に、高校で数学を選択した人は、高校で習った論理とこの本で紹介する論理学との若干の齟齬^{そご}が気になるかもしれません。これは、高校数学では本格的に論理学を扱うことができていないからです。まあ、微分積分（解析学）でも同様の事情ですね。そこで、この本では高校数学流の論理学も確認した上で、正統な論理学を積み重ねていくことにします。

0章で理解してもらう具体的内容は、背理法・対偶法・数学的帰納法といった数学の証明法、自然数を表すときに用いる N 進法、無限個のものの数え方です。数学的帰納法は高校数学でも理解しにくい項目の一つですが、教科書よりも分かりやすい説明をしたつもりです。

1章から本格的な論理学に入ります。

まず、1章では記号論理学の導入として命題論理を扱います。ここで論理記号の意味を知り、論理式に慣れてください。命題論理は表現力が貧弱なので、実際の数学の記述には役に立ちませんが、2章で解説する述語論理の原型として学んでほしいと思います。また、1章では命題論理を通じて、公理とは何か、**証明**とは何かについて解説します（太字の**証明**は論理式についての証明を表します）。不完全性定理の証明では「肯定も否定も**証明**できない論理式」を作ります。この**証明**の意味がここで分かります。

次に、2章で述語論理を紹介します。述語論理を用いれば、多くの数学の命題を論理式で表すことができるようになります。

ここで、述語論理に関する定理であるゲーデルの完全性定理を紹介します。完全性定理は、簡単に言うと、「論理式が**証明**できるときはモデルが

存在する」ことを主張する定理です。証明もこの章で行ないます。

1 章, 2 章が記号論理学の基礎で, コンピュータで言えば Windows や Android といった OS に相当します。

3 章では, 自然数の仕組みを表すペアノ算術を導入します。これはいわば, 自然数を扱うためのソフトです。ここまで読んでもらおうと,

「ペアノ算術を含む無矛盾な理論は不完全である」

という不完全性定理の正確な記述を理解できるようになります。

4 章では, いよいよ不完全性定理の証明を行ないます。現在では, 不完全性定理にはいくつもの証明がつけられています。そのほとんどは, A さんの話に出てきた「ゲーデル数 x を持つ論理式は**証明**できる」ことを表す論理式 $\text{Pr}(x)$ を用いる証明法です。

実は, この論理式 $\text{Pr}(x)$ から, 肯定も否定も**証明**できない論理式 (ゲーデル文) をすぐに作ることができます。 $\text{Pr}(x)$ の存在を前提にすれば, 不完全性定理の証明を理解することはそんなに困難なことではないのです。

論理式 $\text{Pr}(x)$ をどう扱うかによって, 不完全性定理の証明は大きく 3 つの方法に分類できると考えます。

1 つ目の証明は, 論理式 $\text{Pr}(x)$ が計算可能な関数で表現できることを示す方法です。この証明法では具体的な論理式を明示するわけではありません。作り方を示唆するだけですから, 腑に落ちない読者も多いと思います。さきほどの A さんが読んだ本はどれもこの証明法で書かれていたのです。

2 つ目の証明は, 関数 $\text{Pr}(x)$ が再帰的関数であることを示す方法です。再帰的関数とは, ざっくり言えば関数を繰り返し用いて値を求めていく関数のことです。実は, ゲーデルの原論文ではこの方法で不完全性定理を示していました。しかし, この方法も論理式のイメージが湧かないという難点があります。

3 つ目の証明は, 論理式 $\text{Pr}(x)$ を明示する方法です。いわば直接法です。この本ではこの方法を初めに紹介します。

ほとんどの解説本では1つ目または2つ目の証明を紹介しています。なぜ読者の納得感が薄い証明の方を採用する本が多いのでしょうか。それは現在の不完全性定理の学問的位置づけと関係しています。

論理学は、不完全性定理を基礎として、証明論、計算可能性理論、モデル理論と発展していきました。ですから、情報科学の先生が不完全性定理を通して情報科学の骨格を伝えようとするのは自然なことです。不完全性定理は、計算可能性や関数の再帰性と絡めて説明されることが多いのです。

しかし、単に不完全性定理の証明を知りたいというアマチュアにとっては、論理式 $\text{Pr}(x)$ が計算可能関数や再帰的関数で表されることを保証してもらうよりも、 $\text{Pr}(x)$ そのものを見てみたいと思うのではないのでしょうか。実のところ、私もアマチュアなのでそう思うのです。ですから、この本では、不完全性定理の主張である、肯定も否定もできない論理式を論理式 $\text{Pr}(x)$ から作ってみせましょう。

この本で紹介する不完全性定理の証明は、学習研究社が販売している「大人の科学」の付録に似ているかもしれません。例えば、ピンホールカメラ、円筒レコード付きエジソン蓄音機、活版印刷機、…。これらは現代の高度な機器と比べれば子供のおもちゃです。しかし、高度な機器ではブラックボックスになっている機械の原理を実感するには、打ってつけのガジェットなのです。

わくわくしながら不完全性定理を実感してもらうのが私の願いです。