

ゲーデルの不完全性定理の頂^{いただき}を踏む

目 次

はじめに.....	3
-----------	---

Chapter

0

準備

1 集合の基礎.....	18
集合の定義の仕方／2つの集合の関係と演算／直積／ラッセルのパラドックス	
2 数学の証明法.....	30
いろいろな証明法／必要条件・十分条件／言い換えを真理集合で確かめる	
3 N 進法.....	44
10進法から N 進法へ／ N 進法の計算に慣れる	
4 2つの無限.....	52
数えることができる無限／数えることができない無限	
5 数学的帰納法.....	62
数学的帰納法の基本形／使える強化帰納法／一筆書きの定理を証明する	
Column 帰納と演繹.....	77

Chapter

1

命題論理

1 命題と論理記号.....	80
命題の基本, 「かつ」と「または」／「でない」と「ならば」	

2	論理式と真理値表	90
	論理式から真理値表を作る／同値な論理式／記号 $\vdash$	
3	形式的証明	104
	形式的操作に慣れよう／推論法則を手に入れよう／命題論理の演繹体系 LF	
4	完全性定理を証明するために	116
	完全とは、健全かつ適合／演繹定理／条件法の前件の交換／置き換えの定理／形式的対偶／条件法と推論規則	
5	命題論理の完全性定理の証明（その1）	131
	適合性の証明／強い形の完全性定理	
6	命題論理の完全性定理の証明（その2）	141
	無矛盾のまま拡大する／ Γ_ω の作り方／完全性定理（強い形）の証明	
7	$\wedge, \vee$ が入った論理式に備える	157
	$\wedge, \vee$ の推論法則／ $\wedge, \vee$ を含む論理式の書き換え	
	Column 詐欺被害防止のポスター	166

Chapter 2 述語論理

1	述語記号と量子化	168
	述語： x が入った命題／ $\forall, \exists$ を用いて命題を作る／述語論理の論理式	
2	構造と論理式の真偽	183
	真理集合から真理値が定まる／量子化と否定／束縛変項・自由変項／述語論理の論理式に真理値を与える／ $\rightarrow$ の真理値表再説／妥当式・矛盾式・充足可能式	
3	妥当式を確認する	207
	いろいろな妥当式／2個以上の量子化がついた論理式	
4	述語論理の演繹体系	223
	LFを拡張した述語論理の演繹体系／述語論理の演繹定理／	

$A(x)$ と $B(x)$ を組み合わせた定理

5 ゲーデルの完全性定理..... 246

健全性の確かめ/ Γ_ω の作り方/モデルの作り方/完全性定理の証明

Column ぼくの好きな F_2 の拡大体..... 264

3

Chapter

N とPA

1 等号公理..... 268

述語としての「=」

2 偽項について..... 277

偽項を導入する動機/「存在し、ただ1つ」を論理式で表現/ $A(c)$ と導出同値な論理式

3 ペアノ算術 (PA)..... 287

ペアノの公理/ペアノ算術 (PA) /後者関数の公理/足し算の公理/
掛け算の公理/帰納法の公理IND

4 不等号..... 309

不等号の公理/不等号の入った定理、書き換え公式

5 限定量化子..... 320

$\forall$, $\exists$ と不等号を組み合わせた記号/最小化して関数を作る/
PAのモデル N

6 論理式のクラス..... 339

Δ_1 , Σ_1 , Π_1 論理式/論理式のクラスと適合性

7 L_A での表現力を磨く..... 351

素数 p の累乗に関する述語/ p 進法表示の数を操る述語/
数列を補助にして作る述語

Column 頭休めに落語はいかが?..... 370

- 1 理論の完全性..... 372
不完全性定理のステートメント
Column Q の不完全性..... 377
- 2 ゲーデルの第1不完全性定理..... 383
ω 無矛盾と無矛盾の違い／ゲーデルの第1不完全性定理の証明のアイデア
- 3 論理式のコード化..... 390
記号列を17進法で数に対応付ける／記号列の操作に関する述語／
項や論理式であるかを判定する述語／公理であるかを判定する述語／
証明可能性述語 $\text{Pr}(x)$
- 4 不動点定理..... 418
数項(?) $\bar{x}$ の扱い方／不動点定理
- 5 ゲーデルの第1不完全性定理の証明..... 427
ゲーデルの第1不完全性定理／ゲーデル・ロッサーの不完全性定理
- 6 第2不完全性定理..... 437
ゲーデルの第2不完全性定理／ D_2 の証明
- 7 D_3 の証明..... 447
「形式的証明」を表す論理式が証明できる／ Σ_1 論理式の再構成／
原子的述語の次に Σ_1 論理式について証明／ Σ_1 論理式を再構成して証明

- 1 原始再帰的関数..... 470
本章を設けた理由とあらすじ／原始再帰的関数
- 2 再帰的関数を L_A の論理式で表す..... 482
再帰的関数

3	β 関数	490
	β 関数で数列を作る／ β 関数を用いて繰り返し関数を作る	
4	原始再帰的述語・再帰的述語	498
	特性関数と述語の関係／述語を限定最小化して作る関数／ 原始再帰的集合・再帰的集合・RE集合	
5	ゲーデル原論文の香り	510
	元祖ゲーデル数／ゲーデル論文の恩恵	
	あとがき	522
	主な参考文献	525
	索引	526