

Chapter

1

命題論理

さあ、ここから本格的な論理学の解説が始まります。
登頂開始、登山口に入ります。

論理学の視点の1つは、記号と意味を分けて考える視点です。この章で、この視点をしっかりと身に着けておくことは、後の章の理解のために必須です。

いま読んでいる事項の解説が、形式的な記号に関する叙述なのか、内容的な意味に関する叙述なのか、を意識しながら読み進めることがクリアな理解につながります。

この章のメインディッシュは、6節、7節で証明する命題論理の完全性定理です。これはゲーデルの完全性定理の命題論理バージョンとも言えるものです。この小ピークを踏破しただけでも、十分に達成感があることでしょう。

1 命題と論理記号

高校数学では「集合と論理」という単元がありました。いまは「集合と命題」という単元名になっています。高校で習う微分積分が、大学以降の解析学に比べて厳密でないように、論理学の分野でも高校数学で習う「集合と命題」と、大学以降で習う論理学の間には若干の齟齬があります。

高校で習った「集合と論理」の単元を、この本で扱う論理学に合うように修正補足しながら復習してみましょう。

命題の基本、「かつ」と「または」

正しいか、誤りであるか判定できる文や式を命題といいます。命題の内容が正しいときは真、誤りのときは偽といいます。

正しいとも誤りであるとも判定できない文や式は命題とは呼びません。

問題 1.01 命題と真偽

次の文、式が命題か否かを判断し、命題であれば真偽を判定せよ。

- (1) 地球は太陽系の惑星である。
- (2) 禁煙した方が健康にはよい。
- (3) $2+3=6$
- (4) 日本は南半球にあり、アジアに属している。
- (5) $x < -2$

(1) 科学的事実を叙述している文章で、正しい内容ですから命題であり真です。

(2) 私はそうと思いますが、たばこが好きな人はそう思わない人も多いでしょう。このように述語が形容詞の文章は命題ではない場合が多いです。

(3) この式は、 $2+3$ と 6 は等しいという意味ですから、真偽を判断できる内容であり、これも命題です。この命題は偽です。ちなみに $2+3 < 6$ は、真な命題です。

(4) 命題です。後半は正しいですが、前半は正しくないで、文全体では正しくない、すなわちこの命題は偽であると判断します。

(5) $x < -2$ は、 x の値により成り立ったり（真）、成り立たなかったり（偽）します。 $x < -2$ は命題ではありません。詳しくは2章で扱います。 [解答終わり]

(4) は前半と後半というように命題を分割することができました。(1)、(3) のようにこれ以上分割できない命題を原子的命題 (*atomic proposition*)、(4) のように分割できる命題を複合命題といいます。原子的命題には P , Q , R , ... と P から始まるローマ字の太字を当てて表すことにします。

原子的命題の真偽の判定は叙述内容の吟味であり、現実的な問題を扱う場合には真偽を判定することが困難な命題が多くあります。しかし、この本では簡単に真偽が判断できる原子的命題しか扱いません。この章で扱う命題論理で重要なのは、原子的命題の真偽が与えられたときの複合命題の真偽です。例を挙げて説明してきましょう。

問題 1.02 連言命題

「佳代さんは、部屋で音楽を聴いている」

という命題について、(i) ~ (iv) のそれぞれの状態のとき、命題の真偽を判定せよ。

	部屋	音楽
(i)	在室	聴いている
(ii)	在室	聴いていない
(iii)	不在	聴いている
(iv)	不在	聴いていない

この問題の文は状態によって真偽が変わってしまいますから、そもそも命題かという疑問が湧きますが、説明のためと割り切ってください。

すぐに分かるように、(i) だけが真で、(ii), (iii), (iv) のときは偽です。

[解答終わり]

問題の命題は2つの命題に分解することができます。命題 P , Q を

P : 佳代さんは部屋にいる

Q : 佳代さんは音楽を聴いている

とします。すると問題の

佳代さんは、部屋にいてかつ音楽を聴いている ……①

という命題は、「 P かつ Q 」を意味しています。「 P かつ Q 」を意味する命題を、 P と Q の連言といいます。

「(i) 在室 聴いている」という状態のとき、 P は真、 Q は真です。このとき、「 P かつ Q 」は真になります。「 P かつ Q 」は、 P も Q も真のときのみ、真になります。ですから、「(ii) 在室 聴いていない」という状

表1

	P	Q	P かつ Q
(i)	真	真	真
(ii)	真	偽	偽
(iii)	偽	真	偽
(iv)	偽	偽	偽

態のときは、 P は真、 Q は偽であり、「 P かつ Q 」は偽になります。まとめると、表1のようになります。

このような表を真理値表といいます。真と偽の表し方には、T (true) と F (false), $\top$ と $\perp$ で表す流儀もあります。

この問題では、具体的な命題 P, Q のもとで連言「 P かつ Q 」の真偽を調べました。この表から、命題「 P かつ Q 」の真偽は、命題 P, Q の真偽が決まれば、決定することが分かります。

この真偽の表は一般的に成り立つことなので、記号でまとめておきます。

P , Q を0または1をとる変数とします。命題を表している太字の P, Q ではなく、細字の P , Q であることに注意。

すると、(P , Q) の1, 0のパターンは、全部で (1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0) の4通りあります。この4通りの1, 0の組に対して、以下のように0, 1を与える P と Q の2変数関数 $P \wedge Q$ を考えます。

表2

	P	Q	$P \wedge Q$
(i)	1	1	1
(ii)	1	0	0
(iii)	0	1	0
(iv)	0	0	0

表1と表2を比べてみましょう。表1の真を1に、偽を0に対応させることで、命題 P, Q の真・偽のパターンに対する命題「 P かつ Q 」の真・偽と、変数 P , Q の1, 0のパターンに対する2変数関数 $P \wedge Q$ の1, 0が対応しています。

P , Q は命題 P , Q を、 $P \wedge Q$ は命題「 P かつ Q 」を抽象化して表現していると言えます。ですから、初め P , Q を単に変数と言いましたが、このように命題の真理値を表す変数なので、この変数を命題変数といいます。

$\wedge$ は「かつ」を表す論理記号です。命題変数の値の1, 0も真理値, 表2も真理値表と呼ぶことにします。命題変数に1または0を割り当てることを真理値割り当てといいます。(P, Q)の真理値割り当ては, 全部で(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)の4通りがあります。

次に, 問題の命題の文で「かつ」のところを「または」にした命題を作ってみましょう。すると, 命題は

佳代さんは, 部屋にいる, または音楽を聴いている ……②

となります。

P : 佳代さんは部屋にいる

Q : 佳代さんは音楽を聴いている

とするとき, ②の命題は, 「 P または Q 」を意味しています。「 P または Q 」を意味する命題を, P と Q の選言といいます。

この命題の真偽はどうなるでしょうか。 P , Q の真偽に対し, 「 P または Q 」の真偽は次のような真理値表にまとまります。

	P	Q	P または Q
(i)	真	真	真
(ii)	真	偽	真
(iii)	偽	真	真
(iv)	偽	偽	偽

「 P または Q が真である」ということは,

「 P が真である」または「 Q が真である」ということであると考えれば, (ii), (iii)のとき「 P または Q 」が真になることは納得がいくでしょう。

P も Q も偽であるとき, 「 P または Q 」が偽になることもよいでしょう。

(i)の P も Q も真であるとき, 「 P または Q 」が真になることに違和感を持つ人がいるかもしれないので少し補足します。

佳代さんは, 自宅にいる, または学校にいる

という場合, 自宅と学校に同時にいることはできませんから,

P : 佳代さんは自宅にいる

Q : 佳代さんは学校にいる

とすると, P と Q が同時に真になることはありません。(i)の場合はありません。得ないことになります。「または」という言葉が, このような状況を想起させることにより, (i)の場合に真であると判断することに自信が持てない人もいるでしょう。

こういう人は, この本で使う「または」という用語は, (i)の P , Q がともに真であるときにも, 「 P または Q 」は真になると覚えてください。

なお, 上の表で(i)の場合は偽であるとする立場をとる, 排他的選言と呼ばれる複合命題もありますが, この本では二度と出てこないのを忘れてください。

ちなみに, ゆうちょ銀行ATMで表示される「通帳またはカードを入れてください」の「または」は排他的選言です。私は, 通帳とカードを同時に入れたことがあります。お金を引き出すことができませんでした。

排他的選言に対して, 「 P または Q 」を非排他的選言といいます。この本では選言といえば, 非排他的選言のことです。もっとも, この選言という呼び方自体, このあとほとんど出てきません。

選言の方も記号でまとめておきましょう。命題変数 P , Q に関する2変数関数 $P \vee Q$ を次のように定義します。すると, $P \vee Q$ は命題「 P または Q 」を表していると言えます。論理記号 $\vee$ は, 「または」を表しています。

	P	Q	$P \vee Q$
(i)	1	1	1
(ii)	1	0	1
(iii)	0	1	1
(iv)	0	0	0

「でない」と「ならば」

次に、命題 P の否定の命題「 P でない」について真理値表を作ってみましょう。前の例で文章を書けば、

P ：佳代さんは自宅にいる

P でない：佳代さんは自宅にいない

となります。 P が真のとき「 P でない」は偽であり、 P が偽のとき「 P でない」は真です。真理値表にまとめると、次の左表のようになります。これは納得しやすいでしょう。

命題変数 P の真理値に対して、 $\neg P$ の真理値を次の表で定義します。真理値は右表のようにまとまります。論理記号「 $\neg$ 」は命題の否定を表しています。

P	P でない
真	偽
偽	真

P	$\neg P$
1	0
0	1

次に、命題「 P ならば Q 」を扱います。この命題は条件法または含意と呼びます。 P を前件、 Q を後件といいます。

初めに命題「 P ならば Q 」の真理値表を紹介しましょう。

	P	Q	P ならば Q
(i)	真	真	真
(ii)	真	偽	偽
(iii)	偽	真	真
(iv)	偽	偽	真

命題 P 、 Q を次のように変えて説明してみます。

P ：天気は晴れ

Q ：遊園地に行く

「天気は晴れば、遊園地に行く (P ならば Q)」と約束していたとします。

天気が晴れて (P は真) 遊園地に行けば (Q は真)、約束を守ったこととなりますから、「 P ならば Q 」は真です。天気が晴れた (P は真) にもかかわらず遊園地に行かなければ (Q は偽)、約束を破ったこととなりますから、「 P ならば Q 」は偽です。(i), (ii) までは納得していただけでしょう。

天気が晴れない (P は偽) ときについては、そもそも約束をしていないのだから、遊園地に行こうが行かまいが (Q は真でも偽でも)、約束を破ったことにはならない。「 P ならば Q 」は偽ではない、すなわち真である。こう説明するのが、「 P ならば Q 」の真理値表の一番簡単な説明です。

しかし、 P が偽である場合 ((iii), (iv)) について、上のような説明で納得できないという方も多いでしょう。そもそも真偽を決めることができないのではないかと考える人がいても当然です。また、 P 、 Q の命題の例の与え方によっては、どうしても「 P ならば Q 」の真理値表が納得できない場合もあります。

「 P ならば Q 」の真理値表については、2章の述語論理まで学ぶとよく理解できます。いまの段階では、「 P ならば Q 」の (iii), (iv) が真になる理由は、そう決めると論理学の整合性がとれるからと納得して先に進みましょう。

命題変数 P 、 Q に対して2変数関数 $P \rightarrow Q$ は次のように定義します。論理記号「 $\rightarrow$ 」は、「ならば」を表しています。

	P	Q	$P \rightarrow Q$
(i)	1	1	1
(ii)	1	0	0
(iii)	0	1	1
(iv)	0	0	1

なお、 $P \rightarrow Q$ は、 $Q \leftarrow P$ と表記してもよいことにします。

ここで、 $\rightarrow$ （1本矢印）を用いていることに注意してください。本によっては $\implies$ （2本矢印）や $\subset$ を用いている場合もあります。この本では、条件法「ならば」を表す論理記号には $\rightarrow$ を用います。

なお、 $\implies$ の方は、0章で紹介したように、 $p \implies q$ で条件 p 、 q についての命題、「 p ならば q 」を表します。

ここまで、命題とは何かから始めて、複合命題として、連言、選言、否定、条件法を紹介してきました。

そして、それらを命題変数で表すときの記号 $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\neg$ 、 $\rightarrow$ を定義しました。

命題	かつ 連言	または 選言	でない 否定	ならば 条件法
論理記号	$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$\rightarrow$

これら4つの論理記号と、その真理値表をまとめておくと次のようになります。

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$	$P \rightarrow Q$
1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1

複合命題に含まれる原子的命題の真偽が決まれば、複合命題の真偽も決まります。この先は命題の内容を考えるとなく、命題を命題変数で置き換えて抽象的に考えていくことにしましょう。

ここで命題 P と命題変数 P の違いについて補足しておきます。

なぜ太字と細字を使っているのか、面倒くさいだけではないかと思った人もいるかもしれません。実際、論理学の初歩では区別しないことの方が多いかもしれません。しかし、この本のテーマの1つである完全性定理を理解するには、初めから意味と記号を分けておいた方が混乱しないだろうと考えたからです。

標語的に言うと、

命題 P は意味（内容）、命題変数 P は記号（形式）

です。記号はもともと区別のための形式であり、意味は付いていません。解釈する人が初めて意味を付けるのです。

P も P もどちらも記号ではないか、と思う方もいるでしょう。命題 P は、与えられた具体的な命題がありそれを指示しているものです。具体的な命題を日本語で書くのは長いので、 P で省略して表していると考えると捉えやすいかもしれません。

意味と記号を分離して考えるのが数理論理学の第一歩なのです。

意味と記号を、太字と細字で区別して表現するアイデアは、前原昭二『数学基礎論入門』より拝借しました。

Chapter

2

述語論理

この章では、述語論理を解説します。述語論理は命題論理を包摂^{ほうせつ}し、深めた論理体系です。ですから、差分を意識することで、命題論理を理解の踏み台として使うことができます。1章で、論理学の解説を読むときの基本的な態度（記号と意味の区別）を身に着けている方は、困難な箇所なく読み進められることでしょう。

後に用いることになる推論法則・書き換え法則はこの章で紹介され、証明が付けられます。証明を追いかけることに飽きた人は、自分で証明を付けてみましょう。

この章のメインディッシュは、5節で証明する1階述語論理の完全性定理、すなわちゲーデルの完全性定理です。このピークに到達することは、天才ゲーデルの業績を1つ完全理解したことになります。ここまで読んだだけでもこの本を買った価値はあります。

1 述語記号と量化子

1章では命題論理を紹介しました。この章では述語論理を紹介します。

命題論理では、命題変数を組み合わせた論理式の真偽、正しい推論の仕方を知ることができました。しかし、数学で用いる議論にどう役立つのかはよく分からなかったと思います。実際、命題論理では一般の数学の公理や定理を十分に叙述することはできません。論理学の道具を述語論理 (*predicate logic*) まで広げて初めて数学的な内容を表現することができるようになります。

命題論理の命題変数 $P, Q, R, \dots$ では、命題の内容を捨象^{しゃしやう}し真理値だけを扱いました。述語論理では命題が真になるとき、偽になるときはどのような状況のときなのかまで踏み込んで命題を扱っていきます。

述語： x が入った命題

命題を扱う前に、関数について簡単に説明しておきます。

数に対して数を対応させる仕組みを関数と呼びます。

記号 $f(x)$ は、数 x に対して数 $f(x)$ を対応させる関数を表しています。例えば、 $f(x) = 2x + 1$ とすれば、 $f(x)$ は x に対して $2x + 1$ を対応させる関数です。

$f(x) = 2x + 1$ の x に具体的な数を代入すれば、 x に対応する値を求めることができます。 $x = 3$ を代入すると $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ となりますから、関数 $f(x)$ は $x = 3$ に対して 7 を対応させます。

$f(x)$ の x を変数と呼び、変数 x の動く範囲を定義域と呼びます。

$f(x) = 2x + 1$ の定義域を $-3 \leq x \leq 4$ と定めると、それに対する $f(x)$ の

範囲は、 $f(-3) = -5$, $f(4) = 9$ などから、 $-5 \leq f(x) \leq 9$ となります。これを値域と呼びます。

関数の定義域を把握しておくことは重要です。例えば、関数 $f(x) = \sqrt{x}$ ($\sqrt{}$ は中学で習うルート記号) では、 x が 0 または正の数でないと、中学校で習った範囲では値を持ちません。定義域が負の数を含んではいけません。

関数 $f(x)$ は上の例のような多項式や根号で表されなくとも構いません。例えば、 x の定義域を正の整数 $(1, 2, 3, \dots)$ としたとき、 $f(x) = (x$ の約数の中で最大の素数) としても、 $f(x)$ は関数になります。この場合 15 の約数は 1, 3, 5, 15 ですから、 $f(15) = 5$ となります。要は、 x の値を 1 つ選ぶと、 $f(x)$ の値がただ 1 つに決まるとき、 x に対して数を対応させる決まりを関数というのです。

$f(x)$ は 1 つの変数を持つ関数なので x に関する 1 変数関数です。

これに対して、 $g(x, y) = 2x + 3y$ とおくと、 x と y の値を決めれば $g(x, y)$ の値が決まりますから、 $g(x, y)$ は x, y の 2 変数関数です。

さて、命題の話に戻ります。原子的命題、例えば、

P : 5 は奇数である

という命題の文は、主語 (*subject*) が「5」で、述語 (*predicate*) が「奇数である」です。この主語の 5 を変数 x にし、述語はそのままにして、

$P(x)$: x は奇数である

という文を作ります。太字の $P(x)$ は、日本語で書かれた文「 x は奇数である」を置き換えた記号、省略した記号と捉えるとよいでしょう。

P は真ですが、 $P(x)$ はこのままでは真偽は決まりませんから命題ではありません。 $P(5)$ は、「5 は奇数である」であり、命題を表し真偽は真です。また、 $P(6)$ は、「6 は奇数である」であり、命題を表し真偽は偽です。

$P(x)$ は変数 x の値ごとに命題が変化し、変わらないところは、述語の

「奇数である」です。 $P(x)$ のように、述語が定まっいて、主語の x に具体的な数やもの（定数）を代入して命題になる文を「述語」といいます。「述語」の真偽や形式的証明について考察するのが、述語論理の目標です。

命題論理の原子的命題に相当する、 $P(x)$ のようにこれ以上分解できない「述語」を原子的述語と呼びましょう（あまり一般的ではない用語ですが）。

ここまで、文法上の述語と区別するために、論理学の用語として「述語」のようにカッコで括りましたが、以下カッコなしで表現します。

2変数関数があるように述語の変数が2変数であっても構いません。例えば、

$Q(x, y)$ ： x は y より小さい

は、 x, y を変数として持つ2変数述語です。この2変数述語の「述語」は論理学の用語で、 x, y が文法上の主語であるかは問題にしています。

$2 < 3$ が成り立つので、述語 $Q(x, y)$ の x, y に2, 3を代入した命題 $Q(2, 3)$ の真偽は真。 $2 < 1$ は成り立たないので、命題 $Q(2, 1)$ の真偽は偽です。

ここでは例を挙げませんが、さらに進んで一般に n 個の変数を持つ述語もあります。

上の $P(x)$ では、 x が奇数であるか否かに着目していますから、 x に1.5, $\frac{2}{3}$ など整数でない数を入れるのは不都合でしょう。

述語論理では、関数の定義域に相当する範囲を、述語の対象領域 D (domain) または宇宙 U (universe) といいます。対象領域 D の要素を個体といいます。ただし、この本では対象領域 D として、数の集合を用いることがほとんどですから、一般論を説明するときでも個体の代わりに数と表現する場合があります。

対象領域 D が整数全体であるとして、述語「 $P(x)$ ： x は奇数である」を考える、とすれば正確で紛れがありません。

対象領域が異なると、同じ述語でも異なる真理値を持つことがあるので（問題2.01で例を挙げます）、述語論理では対象領域を明確にしておくことが重要です。複数の変数に対して、それぞれ異なる対象領域が設定されていても構いません。

対象領域 D は数の集合でなくとも構いません。対象領域 D を人間の集合として、

$R(x)$ ： x はXY染色体を持っている

という述語でも構いません。

整数を対象領域とする述語 $P(x)$, $Q(x, y)$ の変数 x, y には、計算式や多項式などで整数を表すものであれば代入することができます。

例えば、 $P(3 \times 4 + 2)$, $P(2x + 1)$ などとすることができます。

$3 \times 4 + 2 = 14$ ですから、

$P(3 \times 4 + 2)$ ： $3 \times 4 + 2$ は奇数である

は $P(14)$ と同じ意味を持ち、 $P(3 \times 4 + 2)$ は命題です。14は奇数ではありませんから、命題 $P(3 \times 4 + 2)$ の真偽は偽です。

$P(2x + 1)$ ： $2x + 1$ は奇数である

は、このままでは命題ではありませんが、 $x = 3$ とすれば、 $P(2 \times 3 + 1)$ となり、命題 $P(7)$ を意味します。このように x に具体的な整数を代入すれば命題となるので、 $P(2x + 1)$ は述語です。

命題論理では、具体的な命題を表すのに $P, Q, \dots$ (太字の大文字ローマ字) を用いました。具体的な命題については真偽が定まっています。これに対して、 P, Q の真偽が定まっているとき P かつ Q や P または Q などの複合命題の真偽を調べるために、真理値が0, 1をとる命題変数 $P, Q, \dots$ (細字の大文字ローマ字) を用いました。命題論理の論理式は、命題変数と論理記号を組み合わせで作られていました。

述語論理では、具体的な述語を表すために $P(x), Q(x, y), \dots$ (述語を

表す太字の大文字ローマ字と変数を表す太字の小文字ローマ字) を用います。これに対して、 $P(x)$ かつ $Q(y)$ や、 $P(x)$ ならば $Q(y)$ などの複合述語について調べるために、 $P(x)$, $Q(x, y)$, ... (細字大文字ローマ字と変数を表す細字の小文字ローマ字) を用います。

ちなみに、 $P(x)$, $Q(x, y)$ などの記号は、述語の内容が定まり、対象領域の中で x , y が具体的に定まると真理値 (1 または 0) が決まります。 $P(x)$, $Q(x, y)$ などの記号を述語記号と呼びます。 x , y の値に対して1または0を返すので、述語記号 $P(x)$, $Q(x, y)$ は関数の働きがあると言えます。この働きを捉えて、 $P(x)$, $Q(x, y)$ を命題関数 (*propositional function*) と呼ぶことがあります。

命題論理では、命題 P と命題変数 P の違いを

命題 P は意味 (内容), 命題変数 P は記号 (形式)

とまとめました。これに倣うと、述語と述語記号の違いは、

述語 $P(x)$, $Q(x, y)$ は意味 (内容), 述語記号 $P(x)$, $Q(x, y)$ は
記号 (形式)

とまとまります。ちなみに、

$Q(x, y)$: x は y より小さい

の表記では、 $Q(x, y)$ は具体的な意味が定まっているので太字, 「 x は y より小さい」はその内容を日本語で説明しているので細字のローマ字になっています。意味を持っている記号をすべて太字にしなければならないことにすると、日本語の地の文まで太字になり黒っぽい本になってしまいます。

述語記号のカッコの後の項の個数を項数 (*arity*) といいます。 $P(x)$ は項数 1 の述語記号, $Q(x, y)$ は項数 2 の述語記号です。なお、項についての帰納的定義は後に与えます。

∀, ∃を用いて命題を作る

述語 $P(x)$ の変数 x に定数 a を代入した $P(a)$ は命題になり真偽が定まります。定数の代入の他に、述語 $P(x)$ を命題にする方法には、どういう x のときに $P(x)$ が成り立つかに言及する次の 2 つの方法があります。

「すべての a について $P(a)$ が成り立つ」

「ある a について $P(a)$ が成り立つ」

この 2 つについて説明しましょう。

(ア) 全称量化

対象領域を正の整数とします。 $P(x)$ を

$P(x)$: x は 1 を約数を持つ

とおくと、5 は 1 を約数に持ちますから $P(5)$ は真です。

$P(x)$ の x に「すべて」と形容詞を付けた、「すべての x (正の整数) は 1 を約数を持つ」という文は、真偽を判定することができ、命題になっています。すべての正の整数は 1 を約数に持ちますから、命題の真偽は真です。

述語 $P(x)$ に対して、「すべての a で $P(a)$ が成り立つ」という命題を作ることを全称量化といいます。「すべての a で $P(a)$ が成り立つ」は述語 $P(x)$ を全称量化して作った命題です。

述語記号 $P(x)$ が述語 $P(x)$ を表しているとき、 $\forall x P(x)$ は述語 $P(x)$ を全称量化して作った命題「すべての a で $P(a)$ が成り立つ」を表します。さらに、

述語 $P(x)$ を全称量化して作った命題の真偽が、

真ならば $\forall x P(x)$ の真理値は 1, 偽ならば $\forall x P(x)$ の真理値は 0 になります。

∀ の記号は全称量化子 (*universal quantifier*) と呼ばれます。∀ は、*all* (すべて), *any* (勝手な), *arbitrary* (任意の) の A をさかさまにして作った記号です。

Chapter

3

N と PA

N が意味で、PA が記号です。ペアノ算術と呼ばれる記号の体系 PA に、自然数のモデル N を与えています。

この章では、ゲーデルの不完全性定理のステートメントの中にも出てくる PA を導入します。PA の定理（公理から導出される論理式）を示し、形式的証明を与えることを積み上げていきます。

PA は自然数で意味が与えられる記号体系ですから、PA の定理（論理式）は意味をとると当たり前になんて納得できることばかりです。しかし、意味をとっておざなりにしてしまうのではもったいないです。数少ない PA の公理で、それらすべての定理が証明できるという構造的な美しさをぜひとも堪能してほしいと考えます。

1 等号公理

前の章では、述語論理の完全性定理まで解説しました。この節では、述語論理を前提として、2変数の述語記号「= (等号)」を導入します。

述語としての「=」

「=」は、

$$P(x, y): x \text{ と } y \text{ は等しい}$$

という述語を表す述語記号です。

2章では、2項数の述語記号を $P(x, y)$ と表しましたが、2項数の述語記号「= (等号)」に関しては、 $=(x, y)$ ではなく $x = y$ と表します。

述語論理の体系には、 $=$ がなくとも構いません。実際、2章では $=$ が与えられていません。しかし、これから自然数について記述する上で、 $=$ は基本となる述語を表す記号なので、ここで導入する次第です。

$=$ の意味は今更説明をする必要もないかもしれませんが。数式を扱う文脈では、「左にある数と右にある数が等しい」という意味を持ちます。しかし、ここは構文論を語る場面ですから、いったん意味を忘れて形式的な面に目を向けましょう。

$=$ の意味を知っている人でも、 $=$ の公理を知っている人は少ないと思われる。構文論で等号の記号 $=$ を扱うには、 $=$ が満たす公理(等号公理)を知っておかなければなりません。

述語論理の公理と等号公理から、等号を用いたすべての定理が導けるように、等号公理は設定されています。等号の公理は次の通りです。

公理 3.01 等号公理 (Equal Axioms)

x を変項、 t を項、 $A(x)$ を x を自由変項に持つ論理式とする。

$$\text{EA1} \quad \forall x (x = x)$$

$$\text{EA2} \quad \forall x (x = t \rightarrow (A(x) \Rightarrow A[t/x]))$$

(ただし、 t は $A(x)$ の x に代入可能)

EA2の論理記号 $\rightarrow$ の前は「 $x = t \rightarrow$ 」となっていますが、等号は論理記号よりも先に読みますから $(x = t) \rightarrow$ の意味です。これは $\rightarrow$ の前が論理式でなければならないことから分かります。 $x = (t \rightarrow)$ の意味にとると、 $\rightarrow$ の前が項になってよくありません。

EA1は、意味から考えて当たり前の式ですが、これがないと定理が作れません。EA1は反射公理(反射律)と呼ばれます。

EA2は述語への代入公理と呼ばれます。意味を考えると、 $x = t$ が成り立ち、 t が $A(x)$ の x に代入可能であるとき、 $A(x)$ の x に t を代入した式 $A[t/x]$ は、 $A(x)$ と同値であることを示しています。中学高校での数と式の世界で、 $x = t$ のとき、 $f(x) = c$ であれば、 $f(t) = c$ が成り立つということは論を俟たないと思います。構文論の話をしているので意味を考えてはいけませんが……。EA2は代入公理といえます。

EA2からElim $\forall$ によって導かれた論理式は、

$$x = t \rightarrow (A(x) \rightarrow A[t/x])$$

と

$$x = t \rightarrow (A[t/x] \rightarrow A(x))$$

の2つを表しています。簡潔な記述のため $\Rightarrow$ を用いて表しました。公理の論理式として用いるときは、一方だけを用いることができます。

以下、本節では断らずとも、等号公理を加えた述語論理を扱っていきます。

等号についての定理をいくつか導いてみましょう。

定理 3.02 等号についての定理

任意の項 s, t, u について、次の論理式は定理である。

$$(1) \quad s = t \rightarrow t = s \quad (\text{対称律})$$

$$(2) \quad s = t \wedge t = u \rightarrow s = u \quad (\text{推移律})$$

(2) は、 $(s = t) \wedge (t = u) \rightarrow (s = u)$ の意味です。カッコを付けなくとも意味がとれるように慣れましょう。

[証明]

$$(1) \quad ① \quad x = t \rightarrow (A[t/x] \rightarrow A(x)) \quad \text{EA2 の Elim } \forall \text{ のうち } \leftarrow \text{ を採用}$$

$$② \quad x = t \rightarrow (t = t \rightarrow t = x) \quad A(x) \text{ を } t=x \text{ とする}$$

$$③ \quad t = t \rightarrow (x = t \rightarrow t = x)$$

前件の交換 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ (定理 1.22) と MP より

$$④ \quad \forall x(x = x) \quad \text{EA1}$$

$$⑤ \quad t = t \quad ④ \text{ に Sub}$$

$$⑥ \quad x = t \rightarrow t = x \quad ⑤, ③ \text{ に MP}$$

$$⑦ \quad \forall x(x = t \rightarrow t = x) \quad \text{Gen}$$

$$⑧ \quad s = t \rightarrow t = s \quad \text{Sub}$$

$$(2) \quad ① \quad x = t \rightarrow (A[t/x] \rightarrow A(x)) \quad \text{EA2 の Elim } \forall \text{ のうち } \leftarrow \text{ を採用}$$

$$② \quad x = t \rightarrow (t = u \rightarrow x = u) \quad A(x) \text{ を } x=u \text{ とする}$$

$$③ \quad \forall x(x = t \rightarrow (t = u \rightarrow x = u)) \quad \text{Gen}$$

$$④ \quad s = t \rightarrow (t = u \rightarrow s = u) \quad \text{Sub}$$

$$⑤ \quad s = t \wedge t = u \rightarrow s = u \quad \text{定理 1.40 (4) } A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \wedge B) \rightarrow C$$

[証明終わり]

(1) は対称律, (2) は推移律と呼ばれています。どちらも等号に関する基本的な性質です。(1) も (2) も演繹定理を用いて推論形に直すことができます。

$$s = t \vdash t = s \quad s = t, t = u \vdash s = u$$

反射律, 対称律, 推移律を満たす 2 項関係を同値関係と呼びます。

反射律と述語への代入公理から, 対称律, 推移律を導くことができるところが面白いところです。

公理 3.01 では述語への代入しか認められていませんでした。代入公理の関数バージョンを導いてみましょう。

定理 3.03 関数への項の代入

関数 $f(x), g(x, y)$, 任意の項 s, t について次が成り立つ。

$$(1) \quad s = t \vdash f(s) = f(t) \quad \vdash s = t \rightarrow f(s) = f(t)$$

$$(2) \quad s = t, u = v \vdash g(s, u) = g(t, v)$$

$$\vdash s = t \wedge u = v \rightarrow g(s, u) = g(t, v)$$

[証明]

$$(1) \quad ① \quad x = t \rightarrow (A[t/x] \rightarrow A(x)) \quad \text{EA2 の Elim } \forall \text{ のうち } \leftarrow \text{ を採用}$$

$$② \quad x = t \rightarrow (f(t) = f(t) \rightarrow f(x) = f(t))$$

$A(x)$ を $f(x) = f(t)$ とする。 $f(x) = f(t)$ に量化子が無いので, x に t を代入可能

$$③ \quad f(t) = f(t) \rightarrow (x = t \rightarrow f(x) = f(t))$$

前件の交換 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ (定理 1.22) と MP より

$$④ \quad \forall x(x = x) \quad \text{EA1}$$

$$⑤ \quad f(t) = f(t) \quad \text{Sub } x \text{ に項 } f(t) \text{ を代入}$$

$$⑥ \quad x = t \rightarrow f(x) = f(t) \quad ⑤, ③ \text{ に MP}$$

$$⑦ \quad \forall x(x = t \rightarrow f(x) = f(t)) \quad \text{Gen}$$

$$⑧ \quad s = t \rightarrow f(s) = f(t) \quad \text{Sub}$$

$$\textcircled{9} \quad s = t \vdash f(s) = f(t) \quad \text{演繹定理}$$

よって、 $s = t$ が仮定または定理であれば、MPにより $f(s) = f(t)$ が定理になります。

$$(2) \quad \textcircled{1} \quad s = t \rightarrow g(s, u) = g(t, u) \quad (1) \tau f(x) \sharp g(x, u) \text{に}$$

$$\textcircled{2} \quad u = v \rightarrow g(t, u) = g(t, v) \quad (1) \tau f(y) \sharp g(t, y) \text{に}$$

$$\textcircled{3} \quad (s = t \wedge u = v) \rightarrow (g(s, u) = g(t, u) \wedge g(t, u) = g(t, v))$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{に 定理 1.40 (8)} \quad A \rightarrow B, C \rightarrow D \vdash (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D)$$

$$\textcircled{4} \quad (g(s, u) = g(t, u) \wedge g(t, u) = g(t, v)) \rightarrow g(s, u) = g(t, v)$$

$$\text{問題 3.02 (2)}$$

$$\textcircled{5} \quad (s = t \wedge u = v) \rightarrow g(s, u) = g(t, v) \quad \textcircled{3}, \textcircled{4} \tau \text{三段論法}$$

$$\textcircled{6} \quad s = t, u = v \vdash s = t \wedge u = v \quad \text{定理 1.40 (3)} \quad A, B \vdash A \wedge B$$

$$\textcircled{7} \quad s = t, u = v \vdash g(s, u) = g(t, v) \quad \textcircled{6}, \textcircled{5} \text{に MP}$$

[証明終わり]

次に示す定理は、論理式に項を代入するときに重要となる公式です。

定理 3.04 論理式への項の代入式

以下は、述語論理の公理と等号公理から導出される定理・推論法則である。ただし、論理式 $A(x)$ の x に対して s, t は代入可能。

$$(1) \quad \forall x(x = t \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow A[t/x]$$

$$(2) \quad \exists x(x = t \wedge A(x)) \Leftrightarrow A[t/x]$$

$$(3) \quad s = t, A[s/x] \vdash A[t/x]$$

$$s = t \vdash A[s/x] \rightarrow A[t/x] \quad s = t \rightarrow (A[s/x] \rightarrow A[t/x])$$

意味論的に考えると当然のように思えます。等号公理から証明しておきましょう。

[証明]

(1)

$$(\leftarrow) \quad \textcircled{1} \quad x = t \rightarrow (A[t/x] \rightarrow A(x)) \quad \text{EA2 の Elim } \forall \text{ のうちの } \leftarrow$$

$$\textcircled{2} \quad A[t/x] \rightarrow (x = t \rightarrow A(x))$$

$$\text{前件の交換 } (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad \text{定理 1.22 と MP より}$$

$$\textcircled{3} \quad \forall x(A[t/x] \rightarrow (x = t \rightarrow A(x))) \quad \text{Gen}$$

$$\textcircled{4} \quad A[t/x] \rightarrow \forall x(x = t \rightarrow A(x))$$

$$\forall x(A \rightarrow B(x)) \vdash A \rightarrow \forall x B(x) \quad \text{定理 2.24 (4)}$$

($\rightarrow$)

$$\textcircled{1} \quad \forall x(x = t \rightarrow A(x)) \rightarrow (t = t \rightarrow A[t/x])$$

$$\text{Sub} \quad \forall x A(x) \rightarrow A[t/x]$$

$$\textcircled{2} \quad t = t \rightarrow (\forall x(x = t \rightarrow A(x)) \rightarrow A[t/x])$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad \text{定理 1.22 と MP}$$

$$\textcircled{3} \quad \forall x(x = x) \quad \text{EA1}$$

$$\textcircled{4} \quad t = t \quad \text{Sub}$$

$$\textcircled{5} \quad \forall x(x = t \rightarrow A(x)) \rightarrow A[t/x] \quad \textcircled{2}, \textcircled{4} \tau \text{ MP}$$

(2) 対偶をとると (1) に帰着できます。対偶をとると、

$$\neg \exists x(x = t \wedge A(x)) \Leftrightarrow \neg A[t/x]$$

左辺を変形していくと、

$$\textcircled{1} \quad \neg \exists x(x = t \wedge A(x))$$

$$\textcircled{2} \quad \forall x \neg (x = t \wedge A(x)) \quad \neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x) \quad \text{定理 2.21 (2) と MP}$$

$$\textcircled{3} \quad \forall x (\neg (x = t) \vee \neg A(x)) \quad \text{ド・モルガン 定理 1.41 (3) と MP}$$

$$\textcircled{4} \quad \forall x (x = t \rightarrow \neg A(x)) \quad \neg A \vee B : \equiv A \rightarrow B$$

(3)

$$\textcircled{1} \quad \forall x(x = t \rightarrow (A(x) \rightarrow A[t/x])) \quad \text{EA2 の } \rightarrow$$

$$\textcircled{2} \quad s = t \rightarrow (A[s/x] \rightarrow A[t/x]) \quad \text{Sub}$$

$$\textcircled{3} \quad s = t \vdash A[s/x] \rightarrow A[t/x] \quad \text{演繹定理}$$

$$\textcircled{4} \quad s = t, A[s/x] \vdash A[t/x]$$

演繹定理

[証明終わり]

等号の公理，定理を用いて仮定のある推論の問題を練習してみましょう。

定理 3.05 任意の x に対して，それと等しい y がある

$$\forall x \exists y (x = y)$$

[証明]

$$\textcircled{1} \quad \forall x (x = x)$$

EA1

$$\textcircled{2} \quad x = x$$

Elim $\forall$

$$\textcircled{3} \quad x = x \rightarrow \exists y (x = y)$$

 $A(y)$ が $x = y$ であるとして， $A[x/y] \rightarrow \exists y A(y)$ 問題 2.19 (3)

$$\textcircled{4} \quad \exists y (x = y)$$

②, ③ τ MP

$$\textcircled{5} \quad \forall x \exists y (x = y)$$

Gen

[証明終わり]

あととのために EA2 の使い方を広げておきます。

EA2 の $A[t/x]$ は， $A(x)$ に現れる自由変項 x の“すべて”を項 t に置き換えた論理式を表しています。しかし，“すべて”ではなく“一部”であっても成り立つのです。

定理 3.06 一部だけに代入してもよい

論理式 $A(x)$ に対して項 t は代入可能であるとする。

(1) $A(x)$ の自由変項 x のうち適当な箇所を項 t に置き換えた式を $A'[t/x]$ とする。このとき次が成り立つ。

$$\forall x (x = t \rightarrow (A(x) \Leftrightarrow A'[t/x]))$$

(2) $A[t/x]$ の項 t のうち適当な箇所を変項 y に置き換えた式を $A[y, t/x]$ とすると，

$$A[t/x] \vdash \exists y A[y, t/x]$$

[証明]

(1) $A(x)$ の自由変項 x のうち 1 つを項 t に換える場合を考えます。

換える部分を含む述語を $P(x)$ とします。論理式 $A(x)$ が $P(x)$ を含んでいることを表すつもりで， $A(x)$ を $A[P(x)]$ と表します。

公理 EA2 の Elim $\forall$ により

$$x = t \rightarrow (P(x) \Leftrightarrow P[t/x])$$

論理式 $A[P(x)]$ の $P(x)$ の部分だけを $P[t/x]$ に置き換えた式を $A[P[t/x]]$ と表すと，述語論理の置き換えの定理 2.29 により，

$$P(x) \Leftrightarrow P[t/x] \vdash A[P(x)] \Leftrightarrow A[P[t/x]]$$

$A[P(x)]$ で変項 x は自由変項ですから， $P(x) \Leftrightarrow P[t/x]$ から

$A[P(x)] \Leftrightarrow A[P[t/x]]$ を導く証明は，命題論理の置き換えの定理の手順で間に合い， x についての Gen を使わないで済みます。演繹定理を用いることができ，

$$(P(x) \Leftrightarrow P[t/x]) \rightarrow (A[P(x)] \Leftrightarrow A[P[t/x]])$$

三段論法を用いて，

$$x = t \rightarrow (A[P(x)] \Leftrightarrow A[P[t/x]])$$

となります。最後に Gen で $\forall$ を付けます。

$A(x)$ の自由変項 x のうち何個かを項 t に変える場合は，上の議論を繰り返せばよいのです。

(2)

$$\textcircled{1} \quad A[t/x]$$

仮定

$A(x)$ の変項 x のうち， $A[y, t/x]$ の y と同じ箇所を変項 x に置き換えた式を $A[x, t/x]$ と表すことにします。

例 $A(x)$ が $x+s = x+u$ のとき, $A[t/x]$ は $t+s = t+u$, $A[y, t/x]$ は $y+s = t+u$, $A[x, t/x]$ は $x+s = t+u$

$$\textcircled{2} \quad \forall x(x = y \rightarrow (A[x, t/x] \rightarrow A[y, t/x])) \quad (1) \text{より}$$

$$\textcircled{3} \quad t = y \rightarrow (A[t/x] \rightarrow A[y, t/x]) \quad \text{Sub } x \text{ に } t \text{ を代入}$$

$$\textcircled{4} \quad A[t/x] \rightarrow (t = y \rightarrow A[y, t/x]) \quad \text{前件入れ替え}$$

$$\textcircled{5} \quad t = y \rightarrow A[y, t/x] \quad \textcircled{1}, \textcircled{4} \text{ } \tau \text{ MP}$$

$$\textcircled{6} \quad \forall y(t = y \rightarrow A[y, t/x]) \quad \text{Gen}$$

$$\textcircled{7} \quad \exists y(t = y) \rightarrow \exists y(A[y, t/x]) \quad \text{定理 2.26 (2) の推論型}$$

$$\textcircled{8} \quad t = t \quad \text{EA1 に Sub}$$

$$\textcircled{9} \quad \exists y(t = y) \quad \textcircled{8} \text{ } \tau \text{ Add } \exists : A[t/y] \vdash \exists y A(y) \quad A(y) \vdash t = y$$

$$\textcircled{10} \quad \exists y(A[y, t/x]) \quad \textcircled{9}, \textcircled{7} \text{ } \tau \text{ MP}$$

[証明終わり]

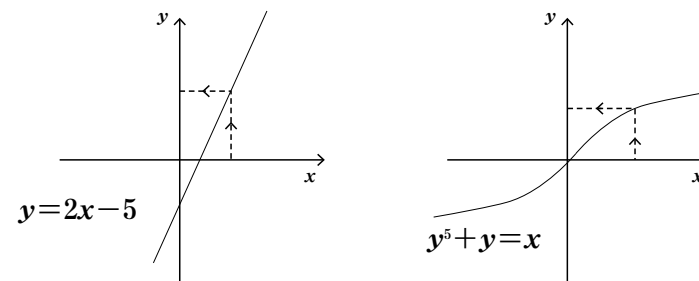
2 偽項について

この節では、数の性質を記述するときの重要な技法である「偽項」について解説します。偽項は *quasi-term* を訳したものです。和書ではあまり見かけませんが、論理式による記述をすっきりと説明していくには必要な用語であると考えます。

偽項を導入する動機

x と y の間に、 $y = 2x - 5$ という関係式が成り立つとき、 x の値を決めると y の値が決まります。このように、 x と y の間に関係があり、 x の値を決めると y の値が1つに決まるとき、 y は x の関数であるといい、 $y = f(x)$ で表しました。 $y = 2x - 5$ の場合、 $f(x)$ は $2x - 5$ と明示的に表すことができます。

ここで、実数 x に対して、 $y^5 + y = x$ を満たす実数 y を対応させる仕組みを考えてみましょう。 $y^5 + y = x$ を満たす実数の組 (x, y) は、次の右のようなグラフで表すことができます。



この図から分かるように、 x の値を決めれば、 y の値がただ1つに決まります。しかし、 y を x の式で明示的に表そうとすると行き詰まります。

Chapter

4

不完全性定理

いよいよ、ゲーデルの不完全性定理の頂を踏むときが来ました。

第1不完全性定理と、その奥の第2不完全性定理のピークを目指しましょう。

1節でこれから目指す不完全性定理のステートメントを紹介します。このステートメントを理解しただけでも、啓蒙書のレベルとは段違いの解像度で、不完全性定理を理解していることを自覚するでしょう。

自己言及型の述語を論理式に実装していく過程は、ミステリー小説の犯人を追い詰める場面を読むような愉悅があると思います。

第2不完全性定理のピークの目前で、空気が薄くなるところ（逐次証明でないところ）もあります。それを差しおいても、最後まで読めば、不完全性定理の証明を完全に理解したと実感し、歓喜することと思います。

1 理論の完全性

この章では、ゲーデルの第1不完全性定理と第2不完全性定理を証明します。しかし、実はまだゲーデルの不完全性定理の正確な記述を紹介していませんでした。そのための準備から始めましょう。

不完全性定理のステートメント

ここで不完全性定理のステートメントを紹介する前に、不完全性定理のときの「完全」の意味の定義を確認しておきましょう。ゲーデルが示した、述語論理の完全性定理の「完全」は、“意味論の真”と“構文論の証明可能”が同値であることを表す言葉でした。一方、ゲーデルの不完全性定理の「完全」はこれとは全く別の概念で、理論（閉論理式の集合）自体の性質を表しています。

定義 4.01 理論に関する完全性

T を理論とする。

T は完全 (complete) である

$\iff$ 任意の論理式 A に関して、 $T \vdash A$ または $T \vdash \neg A$ が成り立つ

T は不完全 (incomplete) である

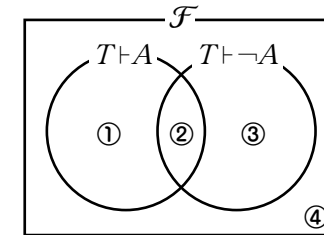
$\iff$ ある論理式 A に関して、 $T \nvdash A$ かつ $T \nvdash \neg A$ が成り立つ

「 T は完全である」の否定が、「 T は不完全である」であることを確認してください。

理論 T が与えられたとき、各論理式 A は、 $T \vdash A$ が成り立つか否

か、 $T \vdash \neg A$ が成り立つか否かによって、次のベン図のように4つの領域のどこかに含まれます。

$\mathcal{F}$ は論理式全体の集合です。



T が完全であるとき、任意の論理式 A に関して $T \vdash A$ または $T \vdash \neg A$ ですから、④の部分に属する論理式はありません。

これに対して、 T が不完全であるときは、④の部分に属する論理式が存在します。

定義 1.29 より、

Γ は矛盾である $\iff \Gamma \vdash A$ かつ $\Gamma \vdash \neg A$ となる論理式 A が存在する
でしたから、

T が矛盾 (inconsistent) であるとき、②の部分に属する論理式が少なくとも1つあります。

T が無矛盾 (consistent) であるとき、②の部分に属する論理式はありません。

T が無矛盾という条件だけでは、④に属する論理式が存在する可能性 (不完全) を否定できません。

④に属する論理式がないときが完全、②に属する論理式がないときが無矛盾です。

T が無矛盾かつ完全であるとき、各論理式 A は①または③のどちらかに含まれます。

T が矛盾であるとき、②の部分に含まれる論理式が少なくとも1つあると書きました。1つでもあれば、**定理 1.30**により $\mathcal{F}$ に含まれる論理式はすべて②の部分に含まれることになります。 T が矛盾しているときは、 T の論理式がすべて②の部分に含まれるときです。ただし、 T が矛盾していることを示すには、 $T \vdash A$ かつ $T \vdash \neg A$ となる論理式 A の例を1つ挙げるだけで構いません。

ここでPAが無矛盾な理論であることを確認しておきましょう。

もしも仮にPAが矛盾しているとする、

$PA \vdash A$ かつ $PA \vdash \neg A$ となる論理式 A が存在する

ことになります。述語論理の健全性により、PAの任意のモデル M で

$PA \models A$ かつ $PA \models \neg A$ となる論理式 A が存在する

となりますが、モデル M では A も $\neg A$ も真になることは起こりえませんから、背理法によりPAは無矛盾です。

なお、PAが無矛盾であることは、モデルの存在を用いずに、集合論を用いて数学的に証明することができますが本書では追求しません。

理論に関する完全・不完全という用語を定義しました。もう1つ、定理の文の中に出てくる「PAを含む無矛盾な理論 T 」という表現について説明しておきます。

PAを含む無矛盾な理論 T とは、PAの公理に適当な公理を付け加えてできる無矛盾な理論（閉論理式の集合）のことです。例えば、PAに☆という演算の公理

$$S1 \quad \forall x (\neg(x=0) \rightarrow x \star 0 = 1)$$

$$S2 \quad \forall x \forall y (\neg(x=0) \rightarrow x \star y' = (x \star y) \cdot x)$$

を付け加えた $S = PA \cup \{S1, S2\}$ は無矛盾な理論になっています（証明略）。このとき、 S はPAを含む無矛盾な理論であるといえます。

ちなみに、例に挙げたS1, S2で定義される式 $x \star y$ は、 N で x^y （ただ

し、 x は0でない）と解釈できます。

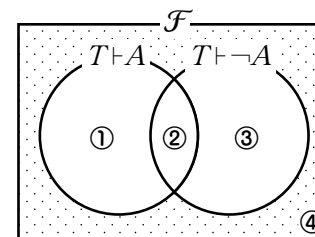
また、 S から導くことができる定理の中から適当な閉論理式を要素として加えた集合 S' もPAを含む無矛盾な理論になっています。

☆のように理論 T で新しい記号を導入したときは、 L_A に新しい記号を加えた L_T を理論 T の言語とします。

定理 4.02 ゲーデル・ロッサーの不完全性定理

T をPAを含む無矛盾な理論とすると、 $T \not\vdash A$ かつ $T \not\vdash \neg A$ となる L_T の閉論理式 A が存在する。

各論理式 A が $T \vdash A$ となるか、 $T \vdash \neg A$ となるかによって閉論理式の集合を場合分けしたベン図を描くと次の図のようになります。ゲーデル・ロッサーの不完全性定理の主張を元にとると、打点部④に含まれる論理式が存在していることが分かります。



ゲーデル・ロッサーの不完全性定理と書いたのは、ゲーデルが証明した不完全性定理は、正確にはPAを含む ω 無矛盾な理論 T に関するの不完全性定理だからです。

次節で説明するように、 ω 無矛盾は無矛盾よりも強い条件になっています。ですから、ゲーデルの証明した不完全性定理は、ゲーデル・ロッサーの不完全性定理よりも弱い内容の定理です。ゲーデルの証明した不完全性

定理に少しの改良を加えて PA を含む無矛盾 (ω が取れた) な理論 T に関して不完全性を証明したのはロッサーです。ですから、本来はロッサーの定理というべきなのかもしれません。しかし、不完全性定理にいたるゲーデルの発想こそが偉大なので、この本ではゲーデルの名前を付けて呼びたいと思います。実際、そう書いている本も多いです。

$T \vdash \neg A$ が成り立つことを、「 T から A を反証できる」と表現すると、ゲーデル・ロッサーの不完全性定理は、

PA を含む無矛盾な理論 T には、証明も反証もできない閉論理式が存在する

と表現できます。この定理を証明することがこの本の目的です。それにはまだまだ相当な準備が必要です。

実は、 Q と呼ばれる、PA の公理よりも少ない公理からなる理論があり、これについては不完全性を比較的簡単に証明することができます。本筋から外れるので Column で証明を紹介します。興味がある人は読んでみてください。

Q の不完全性

3章の本編では、 L_A の論理式の理論として PA を扱ってきました。

PA 以外にも L_A の論理式の理論はいくつもあります。このコラムでは Q を紹介しましょう。

$$QA \quad \forall x(x = 0 \vee \exists y(y' = x))$$

とします。これを用いて、理論 Q を、

$$Q = \{EA1, EA2, PA1, PA2, PA3, PA4, PA5, PA6, QA\}$$

と定めます。

Q では等号 $=$ 、後者関数 $'$ 、足し算 $+$ 、掛け算 $\cdot$ が定められています。不等号は除いて考えます。ただし、帰納法の公理 IND は備え付けられていません。

定理 3.35 は PA を Q に置き換えても成り立ちます。

$$\begin{aligned} m = n &\implies Q \vdash \overline{m} = \overline{n} & m \neq n &\implies Q \vdash \neg(\overline{m} = \overline{n}) \\ m + n = k &\implies Q \vdash \overline{m} + \overline{n} = \overline{k} & m + n \neq k &\implies Q \vdash \neg(\overline{m} + \overline{n} = \overline{k}) \\ mn = k &\implies Q \vdash \overline{m} \cdot \overline{n} = \overline{k} & mn \neq k &\implies Q \vdash \neg(\overline{m} \cdot \overline{n} = \overline{k}) \end{aligned}$$

これらの証明には帰納法を使っていますが、メタな立場での帰納法、論理式の外での帰納法なので、公理 IND を使っているわけではありません。ですから、PA を Q に置き換えても成り立つのです。

しかし、IND は備えられていませんから、問題 3.21(1) で IND を用いて証明した式 $\forall x(0 + x = x)$ を証明することができません。

理論 PA が不完全であることを示すことがこの本のテーマの一つであり、多くの準備が必要でした。一方、理論 Q が不完全であることは比較的容易に示すことができます。この Column で説明しておきます。

定理 Qの不完全性

理論 Q は不完全である。

[証明]

Q が不完全であることを示すために、 $Q \not\models A$ かつ $Q \not\models \neg A$ となる閉論理式 A が存在することを示します。

初めに、 $Q \not\models B$ を示すには、 $M \models B$ となるような Q のモデル M を作ればよいことを確認しておきましょう。

$$Q \vdash B \implies Q \models B \implies \text{任意の Q のモデル } M \text{ で, } M \models B$$

述語論理の健全性

これの対偶をとると、

$$Q \text{ のあるモデル } M \text{ について, } M \not\models B \implies Q \not\models B$$

となります。

論理式 A を $\forall x(0+x=x)$ とすると、 $Q \not\models A$ かつ $Q \not\models \neg A$ となることを示します。

[$Q \not\models \neg A$]

Q のモデル N に関して、 $N \models \neg \forall x(0+x=x)$ ですから、

$Q \not\models \neg \forall x(0+x=x)$ です。

[$Q \not\models A$]

$N \models \forall x(0+x=x)$ であり $N \not\models \forall x(0+x=x)$ ではありませんから、モデル N を使って $Q \not\models \forall x(0+x=x)$ を導くことはできません。そこで、Q の別のモデル M で

$$M \models \forall x(0+x=x) \quad \cdots \cdots \star$$

を満たすものを作ってみましょう。このような M があれば、

$Q \not\models \forall x(0+x=x)$ となります。

自然数の集合 $\mathbb{N}$ に対して、 $\mathbb{N}$ の要素とは別に 2 つの数 a, b を加えて、

モデル M の対象領域 D を $\mathbb{N} \cup \{a, b\}$ とします。この a, b は自然数ではない数です。 a, b を表す L_A の記号を a, b とします。すなわち、 M の要素は、 L_A で以下のように表します。

M	0	n	a	b
L_A	0	$\overline{n}$	a	b

(n は自然数を表す定数)

これから L_A の記号を用いて、 $0, n, a, b$ に関する後者関数・足し算・掛け算の演算を定めていきます。その演算のもとで Q の公理 PA1 ~ PA6, QA が成り立つことを確認します。

[後者関数 ']

$$0' = \overline{1} \quad \overline{n}' = \overline{n+1} \quad a' = a \quad b' = b$$

Q の公理の中で後者関数に関するものは次の 3 つでした。

$$\text{PA1} \quad \forall x \neg (x' = 0)$$

$$\text{PA2} \quad \forall x \forall y (x' = y' \rightarrow x = y)$$

$$\text{QA} \quad \forall x (x = 0 \vee \exists y (y' = x))$$

どれも真理値が 1 となります。

[加法 +]

加法についての演算は次の表のように定めます。自然数を表す $\overline{n}, \overline{m}$ に関してはそのまま和を取り、 $\overline{n} + \overline{m}$ を $\overline{n+m}$ と定めます。 a, b に関しては次のようになります。